

Experimentalphysik II

# Elektrodynamik

---

Sommersemester 2008

Mitschrift der Vorlesung von Prof. Dr. Christian Schüller

Umgesetzt von Florian Rapp.

# INHALTSVERZEICHNIS

1	Motivation.....	4
2	Elektrostatik .....	7
2.1	Elektrische Ladung .....	7
2.2	Das Coulomb'sche Gesetz.....	7
2.3	Das elektrische Feld .....	8
2.4	Das elektrische Potential .....	10
2.5	Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke.....	12
2.6	Der Gauß'sche Satz der Elektrostatik.....	16
3	Anwendung der Elektrostatik .....	18
3.1	Unendlich ausgedehnte, ebene Ladungsschicht.....	18
3.2	Elektrisches Feld eines Plattenkondensators.....	19
3.3	Unendlich langer, geladener Draht.....	21
3.4	Koaxialkabel (Zylinderkondensator) .....	22
3.5	Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel .....	22
3.6	Leiter in einem statischen elektrischen Feld .....	24
3.7	Feldelektronen-Mikroskop.....	27
3.8	Rastertunnelmikroskop.....	28
3.9	Der Faraday'sche Käfig.....	28
3.10	Influenz.....	29
3.11	Bildladung .....	29
3.12	Die Energie des elektrischen Feldes.....	30
4	Materie im elektrischen Feld .....	31
4.1	Elektrostatik in einem Dielektrikum .....	32
4.2	Das Feld einer polarisierten Kugel .....	38
4.3	Die Dielektrizitätskonstante eines dichten Mediums .....	40
4.4	Die Orientierungspolarisation: Paraelektrizität .....	42
4.5	Dipol im Inhomogenen Elektrischen Feld .....	42
4.6	Elektrische Polarisation in Festkörpern .....	43
5	Der elektrische Strom .....	45
5.1	Stromstärke, Stromdichte, Kontinuitätsgleichung.....	45

---

5.2	Elektrischer Widerstand.....	47
5.3	Temperaturabhängigkeit von Widerständen.....	48
5.4	Elektrische Leistung des Stromes in einem Widerstand, Stromwärme.....	49
5.5	Mikroskopisches Modell für das Ohm'sche Gesetz .....	49
5.6	Gleichstromkreis .....	50
5.7	Elektrolytische Leitung.....	52
6	Das Magnetfeld.....	54
6.1	Magnetische Kraft, magnetische Flussdichte und magnetischer Fluss .....	54
6.2	Erzeugung von Magnetfeldern durch bewegte Ladungsträger und Stromschleifen.....	55
6.3	Amperescher Verkettungssatz (Durchflutungsgesetz) .....	56
6.4	Anwendungsbeispiele .....	57
7	Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld .....	60
7.1	Bewegung geladener Teilchen im Magnetfeld .....	63
8	Induktion, elektrischer Schwingkreis .....	64
8.1	Bewegter Leiter im Magnetfeld .....	64
8.2	Faradaysches Induktionsgesetz .....	64
8.3	Maxwell'sche Gleichungen in Integralform .....	65
8.4	Selbstinduktion .....	67
8.5	Anwendungen (Zeitverhalten von Stromkreisen).....	67
8.6	Der elektrische Schwingkreis .....	69
8.7	Erzwungene elektrische Schwingung.....	70
8.8	Komplexe Darstellung von Wechselströmen und Spannungen.....	71
8.9	Impedanz einfacher Wechselstromkreise.....	73
8.10	Leistung und Energie im Wechselstromkreis.....	76
9	Materie im Magnetfeld.....	77
9.1	Diamagnetische Substanzen .....	79
9.2	Ferromagnetismus .....	80
9.3	Temperaturabhängigkeit von $\chi_m$ .....	80

# 1 MOTIVATION

Die vier Bereiche der Mechanik

Klassische Mechanik (Newton)	Quantenmechanik (Bohr, Heisenberg, Schrödinger)
Spezielle Relativitätstheorie (Einstein)	Quantenfeldtheorie (Dirac, Pauli, Feynman, ...)

Die Elektrodynamik in der Maxwell'schen Formulierung ist gültig für alle 4 Bereiche bis zu Abständen von  $10^{-14} \text{ m}$  (4 Größenordnungen kleiner als der typische Atomdurchmesser:  $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ ).

In der Physik treten nach heutiger Erfahrung 4 fundamentale Kräfte auf. [rel. Stärke]

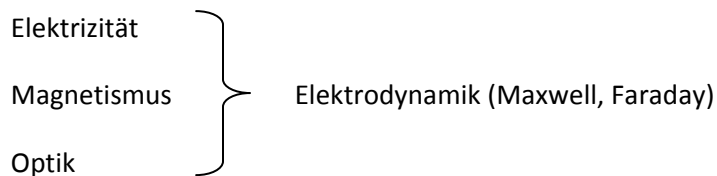
- |                             |                    |
|-----------------------------|--------------------|
| 1. Kernkraft                | 1                  |
| 2. Elektromagnetische Kraft | $\approx 10^{-2}$  |
| 3. Schwache Kraft           | $\approx 10^{-7}$  |
| 4. Gravitationskraft        | $\approx 10^{-38}$ |

Mit Ausnahme der Gravitation sind alle Kräfte der gewöhnlichen Erfahrung (z.B. Rücktreibende Kraft einer Gespannten Feder, Kohäsions- und Adhäsionskräfte,...) in ihrem Ursprung elektromagnetisch.

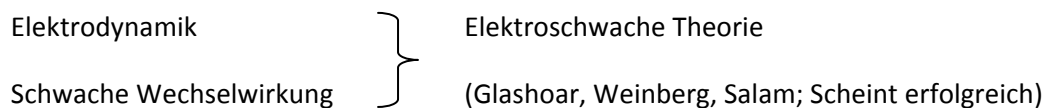
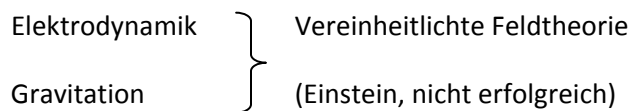
Elektromagnetismus:

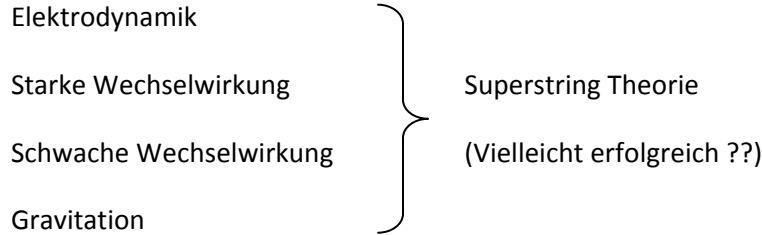
Elektrische und magnetische Phänomene sind miteinander verknüpft → sind Konsequenzen der Eigenschaft der Materie elektrische Ladung zu tragen. (festgestellt zuerst von Oersted, 1820).

Vereinheitlichte Theorie des 19. Jahrhunderts:



Vereinheitlichungsversuche des 20. Jahrhunderts:





**Rätsel:**

Elementarladung, welches die kleinste frei existierende elektrische Ladung darstellt.

$$e = (1,60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19} \text{ C}, 1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

Ladung, die bei 1 Ampere Stromstärke für eine Sekunde durch einen Leiter fließt. Zum Vergleich: Ein Blitz hat ca. 10 C.

Positive wie negative Ladungen treten stets als ganzzahlige Vielfache der Elementarladungen auf. Quarks bilden da keine Ausnahme da diese zwar Brüche der Elementarladung bilden, aber nur in ganzzahligen Kombinationen frei auftreten.

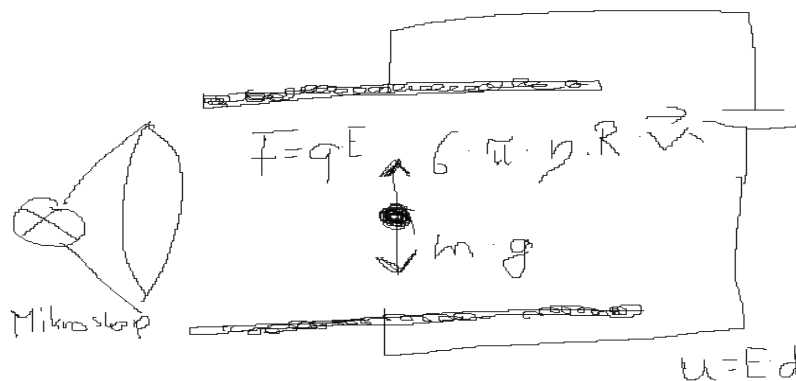
**Feinstrukturkonstante:**

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Als Maß für Stärke der Elektromagnetischen Wechselwirkung.  $\alpha$  hat großen Einfluss auf fast jegliches physikalisches Phänomen. Man nimmt an, dass unser Universum nicht dasselbe wäre, wenn  $\alpha$  nur einen Bruchteil von etwa  $10^{-59}$  größer oder kleiner ausgefallen wäre.

Robert A. Millikan (1910):

Erste Experimentelle Bestimmung der Elementarladung im Öltropfenversuch.



**1. Schwebemethode:**

$$v = 0 \Rightarrow mg = qE \Leftrightarrow q = \frac{mg}{E}$$

Nachteile:

$m$  muss bestimmt werden

Brownsche Molekularbewegung

**2. Umpolmethode:**

$$|E| = \text{const, Richtungswechsel}$$

Entscheidender Unterschied zu Gravitation:

Es gibt positive und negative Ladung.

⇒ Wechselwirkung kann abstoßend (2 Gleiche Ladungen) oder anziehend (2 verschiedene Ladungen) sein.

Zwischen beiden Ladungen besteht perfekt Symmetrie.

**Kraft:**

$$F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

(Coulomb'sches Gesetz)

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9874 \cdot 10^{-9} \frac{Nm^2}{C^2}$$

Ist gültig bis in subatomaren Bereich (Abstände von  $10^{-14} m$ ). Das Coulomb'sche Gesetz beschreibt nicht nur Kräfte zwischen geladenen makroskopischen Körpern, sondern auch zwischen Atomkern und den Elektronen eines Atoms.

Elektrostatische Kraft zwischen 2 Protonen ist etwa  $10^{36}$  mal stärker als die Gravitationsanziehung zwischen ihnen.

Konsequenz der Existenz von 2 Ladungsarten:

Bildung von Atomen, Molekülen, Kristallen, ..., Planeten.

## 2 ELEKTROSTATIK

### 2.1 ELEKTRISCHE LADUNG

a) Es gibt 2 Ladungsarten: Positiv und Negativ.

b) Quantisierung der Ladung:

Jede beobachtete Ladung  $q$  ist ein ganzes Vielfaches (positiv oder negativ) der Elementarladung  $e$  (siehe Millikan Versuch).

$$q = \pm N \cdot e$$

$$e = (1,60217653 + -0,00000014)10^{-19} \text{ C (Quelle: NIST, 2007)}$$

Ladung ist immer an Masse gebunden.

c) Ladungserhaltung:

In jedem abgeschlossenen System ist die algebraische Summe aller Ladungen konstant. (Erfahrungstatsache)

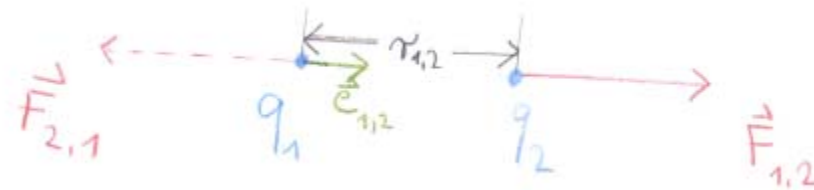
$$\sum_i q_i = \text{const.}$$

d) Ladungsinvarianz:

Die Ladung von Elementarteilchen ist relativistisch invariant, d.h. sie ändert sich nicht mit der Geschwindigkeit des Teilchens.

### 2.2 DAS COULOMB'SCHE GESETZ

**Kräfte zwischen ruhenden Ladungen im Vakuum:**



$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \cdot \vec{e}_{1,2}$$

$q_1, q_2$ : Ruhende Punktladungen

$r_{1,2}$ : Abstand der Punktladungen

$\epsilon_0$ : Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}, \frac{As}{Vm} = \frac{C^2}{Nm^2}$$

Coulombkraft ist Zentralkraft und konservativ (aus Potential herleitbar).

Es gilt:  $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$  („actio=reactio“)

### **Bemerkungen:**

$\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeit wird ständig mit immer höherer Genauigkeit untersucht.

### **Yukawa:**

$\frac{1}{r^2}$  ist nur dann streng zu erwarten, wenn die Ruhemasse des Photons (das die Elektromagnetische Wechselwirkung Vermittelnde Austauschteilchen) gleich 0 ist.

### **Sternexplosionen:**

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Radiosignalen und Lichtgeschwindigkeit ist bis auf rel. Unterschied von  $5 \cdot 10^{-7}$  gleich.

$e^- - e^+$ -Kollisionen am CERN:

$\frac{1}{r^2}$ -Abhängigkeiten gilt bis zu Abständen von  $10^{-18}$  m.

### **Für Coulombkräfte gilt das Superpositionsprinzip:**

Die Kraft  $\vec{F}_0$  von  $N$  Ortsfesten Ladungen  $q_1, \dots, q_n$  auf eine Probeladung  $Q_0$  ist gegeben durch die Vektorsumme.

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j Q_0}{r_{j,0}^2} \cdot \vec{e}_{j,0}$$

## 2.3 DAS ELEKTRISCHE FELD

### **Definition:**

Ist  $\vec{F}_0$  die Kraft, die eine beliebige Ladungsverteilung auf eine punktförmige Probeladung  $Q_0$  ausübt, so ist die elektrische Feldstärke dieser Verteilung am Ort  $\vec{r}$  der Ladung  $Q_0$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_0(\vec{r})}{Q_0}$$

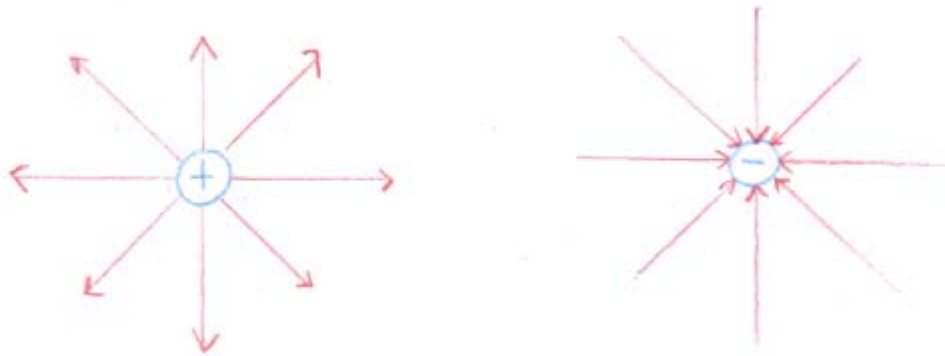


**Beispiele:**

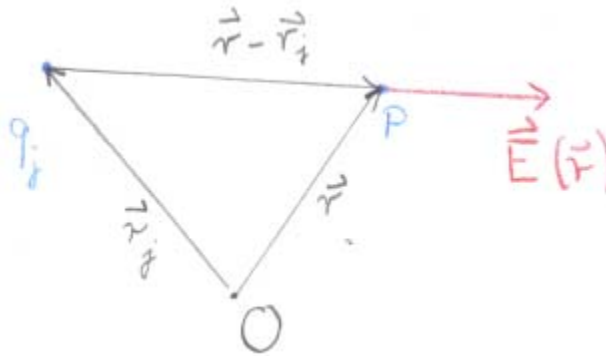
a) Feld einer Punktladung  $q$  im Koordinatenursprung.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Das heißt der elektrische Feldvektor ist von positiven Ladungen weg und zu negativen Ladungen hin gerichtet.



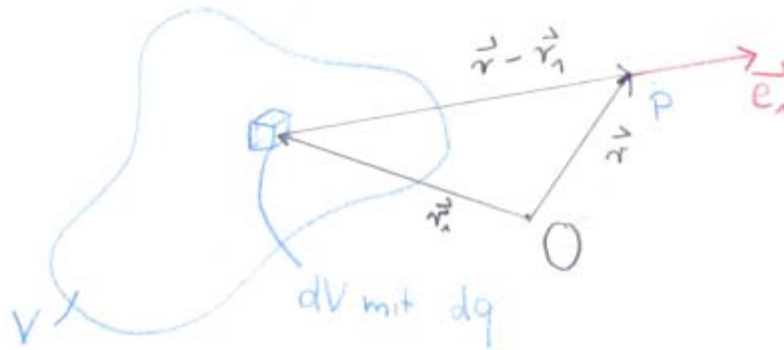
b) Feldstärke einer Verteilung von  $N$  Punktladungen  $q_1, \dots, q_N$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \cdot \vec{e}_j$$

Mit  $\vec{e}_j = \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$ .

## c) Kontinuierliche Ladungsverteilung



Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})} = \frac{dq}{dV}$$

Ersetze Summe in (1.5) durch Integral über Volumen V:

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{e}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{e}_1$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1) dV_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \vec{e}_1$$

## 2.4 DAS ELEKTRISCHE POTENTIAL

Potentielle Energie einer Punktladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$  im Feld  $\vec{E}$  einer Ladungsverteilung

$$W_{pot}(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}' = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Also unabhängig vom Integrationsweg.

$$\frac{W_{pot}(\vec{r})}{q} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' =: \varphi(\vec{r})$$

Definition:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$\varphi(\vec{r})$  ist gleich der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um eine positive Punktladung  $q$  im Feld  $\vec{E}$  einer statischen Ladungsverteilung vom Unendlichen zum Punkt  $\vec{r}$  zu bringen, dividiert durch  $q$ .

$\varphi(\vec{r})$  ist Skalarfeld,  $\varphi(\infty) = 0$ .

### Beispiele:

a) Potential einer Punktladung  $q$  am Ursprung.

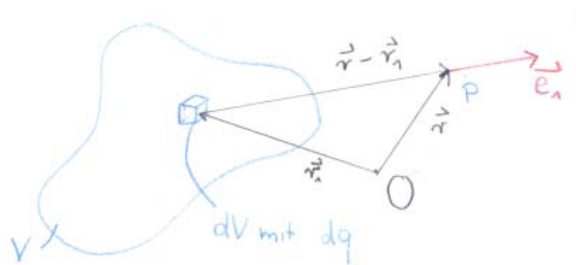
$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

b) Anordnung von  $N$  Punktladungen  $q_1, \dots, q_n$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

(Ungestörte Superposition)

c) Potential einer kontinuierlichen Ladungsverteilung



$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Flächen konstanten Potentials sind Äquipotentialflächen.

$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$  aus (1.10) folgt  $[\varphi] = V = \frac{Nm}{c} = \frac{J}{c} = \frac{W}{A}$ . Im atomaren Bereich wird für Energien (Arbeit) häufig die Einheit  $eV$  verwendet.

$$1eV = 1,602 \cdot 10^{-19} J$$

$1eV$  ist die Arbeit, die man leisten muss um 1 Elektron  $q = -e$  über eine Potentialdifferenz von einem Volt ( $1V$ ) zu bewegen.

Die Potentialdifferenz zwischen 2 Punkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  eines elektrischen Feldes bezeichnet man als elektrische Spannung.

$$U_{21} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

**Bemerkungen:**

Potentielle Energie einer Punktladung. (siehe 1.8)

$$W_{pot}(\vec{r}) = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Ist unabhängig vom Weg, auf dem  $q$  aus dem Unendlichen zum Punkt  $\vec{r}$  geführt wird. Weiterhin gilt:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Das Linienintegral des elektrostatischen Feldes über eine geschlossene Kurve ist Null.

„Die Zirkulation des elektrischen Feldes ist Null.“

„Das elektrische Feld ist wirbelfrei.“

Mit dem Stokes'schen Satz folgt aus (1.15):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 = \text{rot } \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

## 2.5 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN POTENTIAL UND FELDSTÄRKE

$$dW = -\vec{F} d\vec{s} = -q\vec{E} d\vec{s} = qd\varphi$$

Mit  $\vec{E} d\vec{s} = E \cos(\vec{E}, d\vec{s}) = E_s ds$  folgt  $d\varphi = -\vec{E} d\vec{s} = -E_s ds$

$E_s$  ist die Komponente von  $\vec{E}$  in Richtung des Verschiebungsvektors  $d\vec{s}$ .

$$\Rightarrow E_s = -\frac{d\varphi}{ds}$$

Bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem gilt also

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}, E_y = -\frac{d\varphi}{dy}, E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

oder

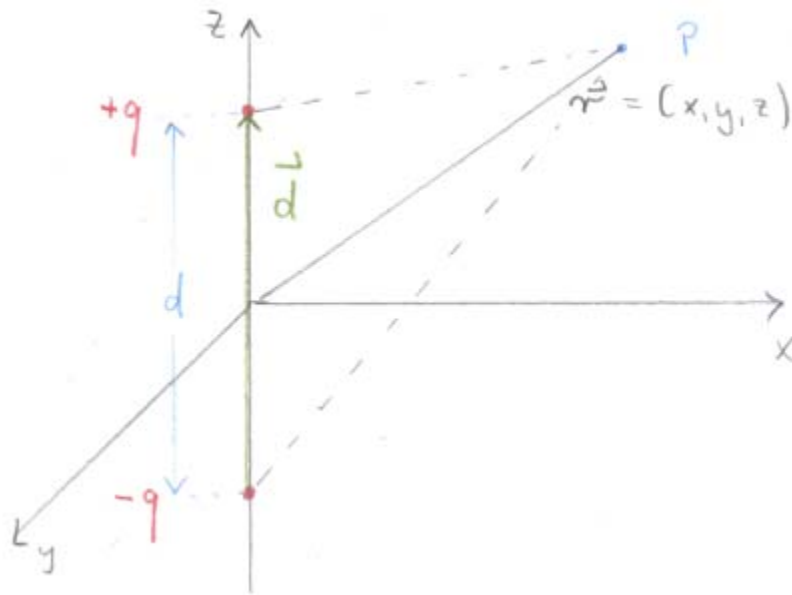
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Praktisch ist es meist am bequemsten mit (1.13) für eine Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  zunächst das Potential zu bestimmen und dann mit (1.18) die elektrische Feldverteilung.

### Beispiel:

Potential und Feldstärke eines elektrischen Dipols



### Dipol:

Negative und positive Ladung mit festem Abstand  $d$ . Überlagerung der Potentiale der beiden Punktladungen am Punkt  $P$ .

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}} \right]$$

Fernfeldnäherung:  $r \gg d$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{2d}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{zd}{2r^2}\right)$$

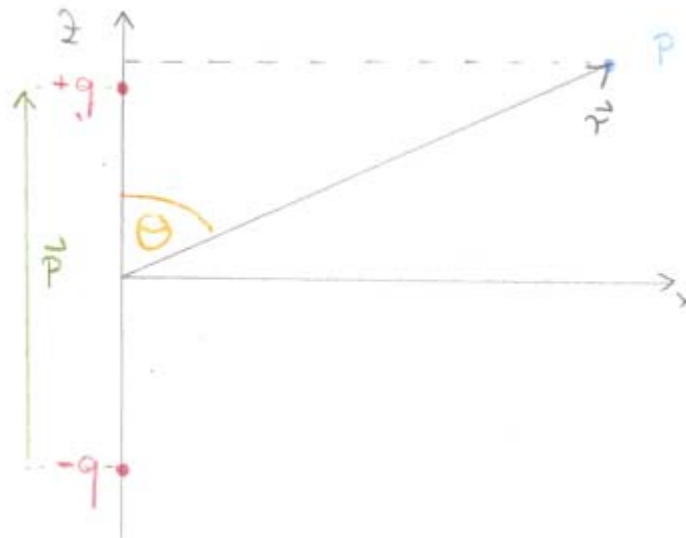
Da  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$  für  $x \ll 1$ .

$$\Rightarrow \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdz}{r^3}$$

$$\vec{p} = q\vec{d} = \text{Dipolmoment}$$

Vektor, der von der negativen zur positiven Ladung zeigt.

Rotationssymmetrische Darstellung in Zylinderkoordinaten:



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \text{ oder } \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Elektrisches Feld:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Feld ist rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse.

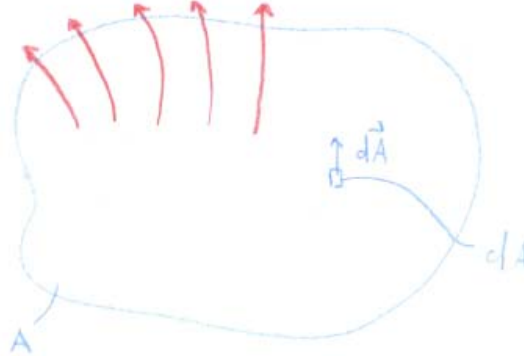
$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}$$

$$E_{\parallel} = E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}$$

### 2.5.1 DREHMOMENT UND KRAFT AUF DIPOL IM ELEKTRISCHEN FELD

Homogenes Feld (Richtung und Betrag überall gleich):

$$\vec{p} = \vec{d} \cdot q$$



$\vec{F}^+ = -\vec{F}^-$  Dipol wird im Feld ausgerichtet.

**Resultierendes Drehmoment:**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_e = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}^+ + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{F}^- = \vec{d} \times \vec{F}^+ = q\vec{d} \times \vec{E}$$

$$\vec{M}_e = \vec{p} \times \vec{E}$$

- Atome, Ionen und Moleküle erhalten durch Verschiebung von positiven und negativen Ladungen in elektrischen Feldern ein induziertes Dipolmoment.  
Beispiel: Wasserstoff (1 Proton, 1 Elektron)  
Für  $E \approx 30 \frac{kV}{cm}$ : Abstand der Ladungsschwerpunkte -  $\approx 10^{-5} \text{ \AA}$
- Polare Moleküle haben ein permanentes Dipolmoment.  
Beispiel: HCl  
Größe des Dipolmoments entspricht Verschiebung eines Elektrons um ca.  $\frac{1}{5} \text{ \AA}$ .

Permanente Dipolmomente sind groß gegenüber induzierten.

## 2.6 DER GAUß'SCHE SATZ DER ELEKTROSTATIK

### Definition:

Elektrischer Fluss  $\phi_e$  durch Fläche  $A$ .

$$\phi_e = \int_A \vec{E} \cdot \vec{dA}$$

$\vec{dA}$ : Vektor; steht senkrecht auf dem Flächenelement der Größe  $dA$ ; weist bei geschlossener Fläche stets nach außen.

### Gauß'sches Gesetz:

Betrachten beliebig geformte, geschlossene Fläche  $A$ , die eine Gesamtladung  $q$  umschließt. Der gesamte Elektrische Fluss durch diese Fläche ist dann:

$$\phi_e = \oint_A \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Bei mehreren Punktladungen:  $q = \sum_j q_j$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:  $q = \int_{V'} \rho_e dV'$

( $V'$ : von der Fläche  $A$  umschlossenes Volumen)





### 3 ANWENDUNG DER ELEKTROSTATIK

Im Folgenden Anwendung der beiden Gesetze.

(i) Gauß'scher Satz

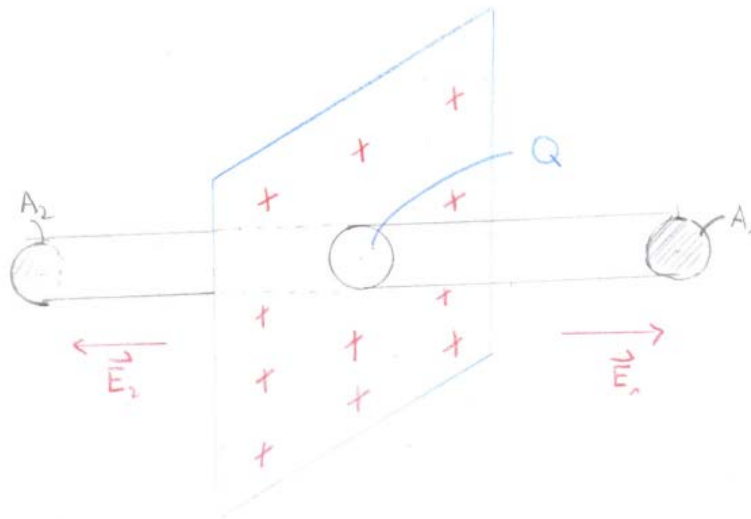
$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

(ii) Zirkulation des elektrischen Feldes ist Null.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

#### 3.1 UNENDLICH AUSGEDEHNT, EBENE LADUNGSSCHICHT



Nur Fläche  $A_1$  und  $A_2$  des Zylinders tragen zum elektrischen Fluss bei, da für Seitenwände gilt:

$$d\vec{A} \perp \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = 0$$

Aus dem Gauß'schen Satz (1.25) folgt:

$$E_1 A_1 + E_2 A_2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

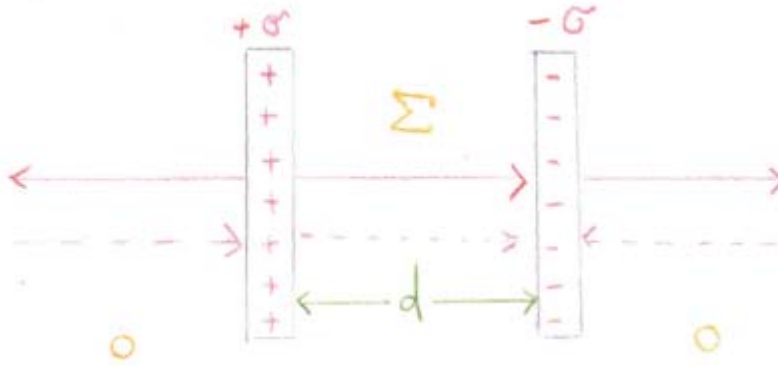
Aus Symmetriegründen gilt:

$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = E$  und  $A_1 = A_2 = A$ , damit folgt aus (2.3).

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$\sigma = \frac{Q}{A}$ : Flächenladungsdichte;  $E$  unabhängig vom Abstand zur Schicht!

### 3.2 ELEKTRISCHES FELD EINES PLATTENKONDENSATORS



⇒ Superposition der Felder. Addieren sich im Innenraum und neutralisieren sich im Außenraum.

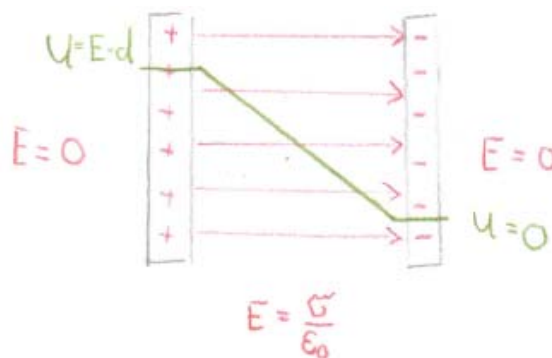
Mit (2.4) folgt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

im Innenraum.

Als Spannung (Potentialdifferenz) erhält man mit (1.14) und (2.5):

$$U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d$$



$$U = \frac{d}{\epsilon_0 A} \cdot$$

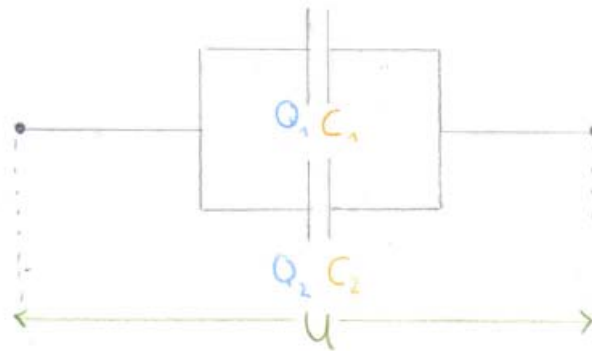
Spannung ist proportional zur gespeicherten Ladung. Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Einheit der Kapazität ist  $F$ , Farrad,  $1F = 1 \frac{C}{V}$ . Große Kapazität: große Fläche, kleiner Abstand.

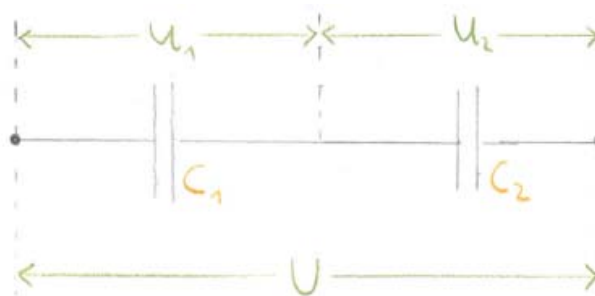
Parallelschaltung von Kondensatoren:



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U = C \cdot U$$

$$C = C_1 + C_2$$

Reihenschaltung von Kondensatoren:



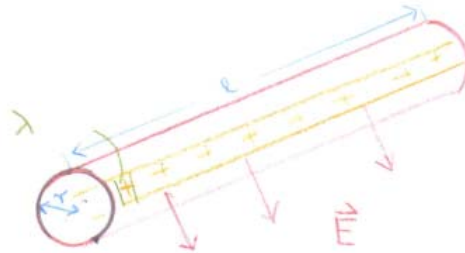
Beide Kondensatoren tragen die gleiche Ladung  $Q$ .

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

### 3.3 UNENDLICH LANGER, GELADENER DRAHT

Einfache Lösung mit Gauß'schen Satz:



Fluss durch Zylinderendflächen ist Null. Durch Anwendung des Gauß'schen Satzes erhält man:

$$\int_{\text{Zylinderwand}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} l \cdot \lambda$$

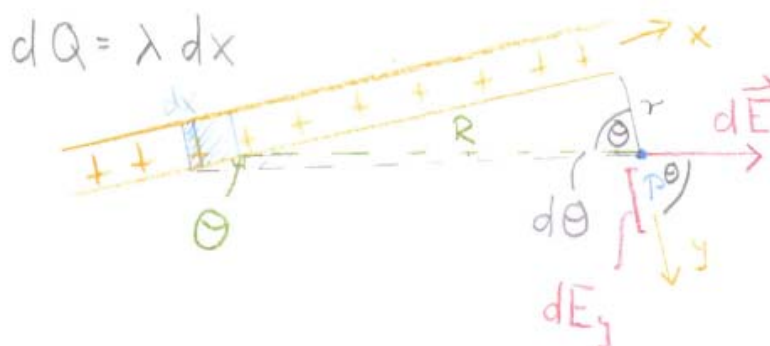
Wobei  $\lambda$  die Ladung pro Längeneinheit ist.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 2\pi r \cdot l, \frac{1}{\epsilon_0} l \cdot \lambda = E \cdot 2\pi r \cdot l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \epsilon_0}$$

Alternative (aufwändigere) Lösung des Problems mit Hilfe von Gleichung (1.7).

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \vec{e}'$$



Aus Symmetriegründen gilt  $E_x = E_z = 0$ ,  $\cos \theta = \frac{Rd\theta}{dx}$ ,  $\frac{r}{R} = \frac{Rd\theta}{dx} \rightarrow dx = \frac{R^2}{r} d\theta$ ,  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2}$ .

$$dE_y = dE \cdot \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{R^2} \cos \theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cos \theta}{R^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} d\theta = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Vergleich mit (2.14) ergibt, dass die Ergebnisse überein stimmen.

### 3.4 KOAXIALKABEL (ZYLINDERKONDENSATOR)



Im Innenraum gilt:  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$  (wie unter 2.3 bei Verwendung des Gauß'schen Satzes)

$$U = \varphi(r_i) - \varphi(r_a) = - \int_{r_a}^{r_i} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_a} E dr = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

Koaxialkabel der Länge  $l$ :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

### 3.5 ELEKTRISCHES FELD EINER HOMOGEN GELADENEN KUGEL



Aus Symmetriegründen steht  $\vec{E}$  immer senkrecht zur Kugeloberfläche. Anwendung des Gauß'schen Satzes:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

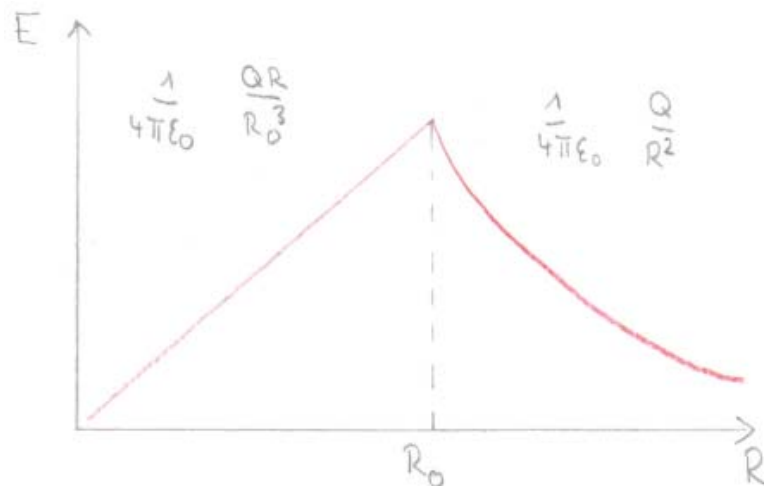
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel ist im Außenraum genau so groß, als sei die gesamte Ladung im Kugelmittelpunkt konzentriert.

Gilt auch, wenn die Ladung auf der Kugeloberfläche sitzt! (Metallkugel)

Feld im Inneren, d.h.  $R < R_0$ :

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q R^3}{\epsilon_0 R_0^3} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QR}{R_0^3}$$



Kapazität der Kugel gegenüber Gegenelektrode im Unendlichen:

**Spannung**

$$U = - \int_{\infty}^{r_0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dR = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Big|_{\infty}^{R_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0}$$

**Kapazität**

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R_0$$

### 3.6 LEITER IN EINEM STATISCHEN ELEKTRISCHEN FELD

Elektrische Leiter enthalten frei bewegliche Ladungsträger, die in elektrischen Feldern in Folge der Coulombkraft verschoben werden.

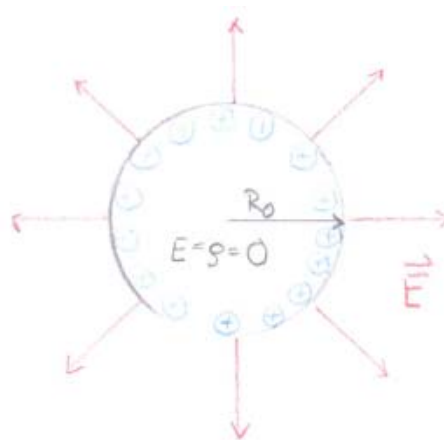
Für geladene elektrische Leiter gilt:

- Das elektrische Feld im Inneren eines Leiters ist in jedem Punkt Null.
- Die elektrische Feldstärke in Hohlräumen innerhalb eines Leiters ist Null (Faraday'scher Käfig).
- Mit Gauß'schen Satz folgt aus a): Die Gesamtladung im Inneren eines Leiters ist Null, d.h. die Ladungen befinden sich auf der Oberfläche.
- Das Potential im Inneren eines Leiters und auf dessen Oberfläche ist konstant. Die Oberfläche eines Leiters ist immer eine Äquipotentialfläche.
- Die Ladungen verteilen sich auf der Oberfläche entsprechend der Krümmung.

Flächenladungsdichte  $\sigma = \frac{dQ}{dA}$  ist umgekehrt proportional zum Krümmungsradius des Flächenelements  $dA$ .

Da  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  (aus Gauß'schen Satz), ist  $E$  größer an Oberflächenteilen mit starker Krümmung ( $\Rightarrow$  kleiner Krümmungsradius).

*Leitende Kugel:*



Das elektrische Feld steht immer senkrecht auf der Metalloberfläche. (Äquipotentialfläche,  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ )

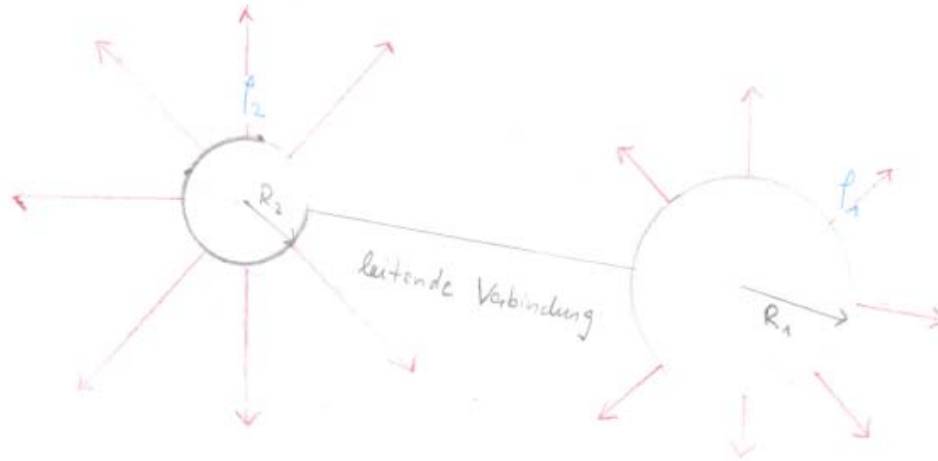
*Feld an der Oberfläche:*

$$E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\frac{Q}{A}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



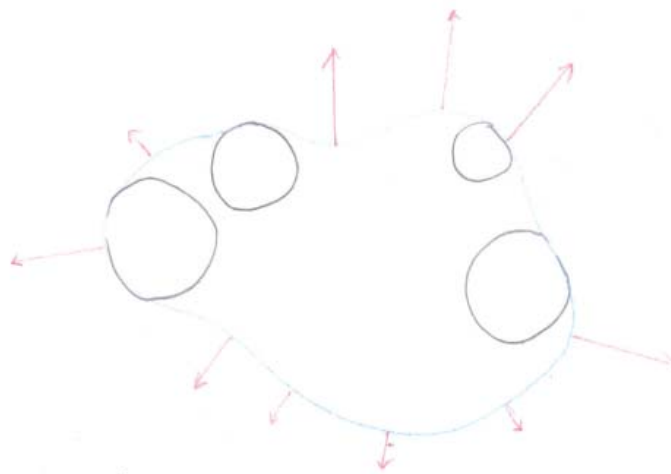
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0^2}; \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0}$$

Kugeln:



Potential ist für beide Kugeln gleich:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , da  $R_1 > R_2$  folgt mit (2.20)  $E_1 < E_2$ .

Beliebige gekrümmte Oberfläche kann man sich aus vielen Metallkugeln zusammengesetzt vorstellen.



Metalloberfläche ist Äquipotentialfläche, besitzt also höhere Flächenladungsdichte an Spitzen.

In einem Leiter bilden sich immer Oberflächenladungen derart bzw. vorhandene Ladungen werden auf der Oberfläche so verteilt, dass  $\vec{E}$  innerhalb des Leiters Null wird.

**Grund:**

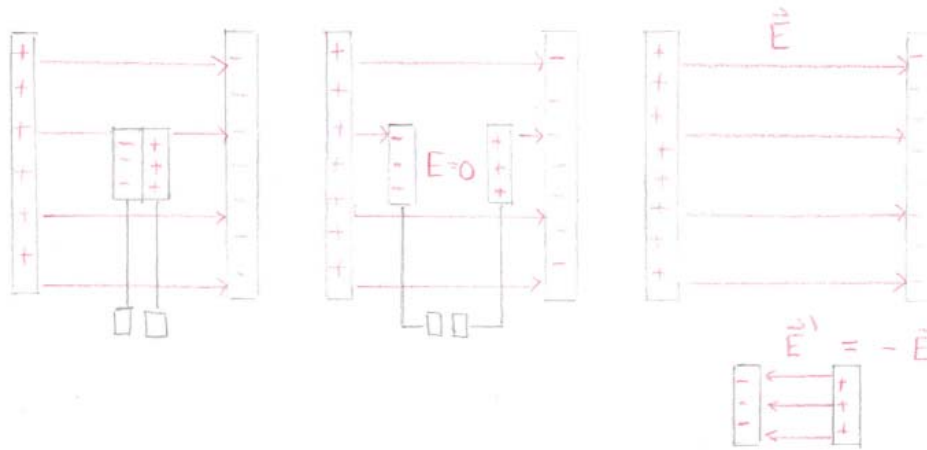
Dies ist der energetisch günstigste Zustand (Zustand kleinster potentieller Energie).

Dies ist allgemein schwer zu beweisen. Beispiel für eine Kugel:

Die Oberfläche des Leiters ist eine Äquipotentialfläche.

Ansonsten würde Strom fließen derart, dass die Ladungen so verteilt werden, dass alle Punkte auf gleichen Potential sind. Mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  folgt, dass  $\vec{E}$  immer senkrecht zur Oberfläche steht. Dies gilt für beliebig geformte Leiter.

Beispiel:



### 3.6.1 DIE LAPLACE GLEICHUNG FÜR DAS POTENTIAL

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(A)} \rho dV$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt aus dem Gauß'schen Satz:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{V(A)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

**Bemerkung:**

$$\vec{\nabla} \varphi = \text{Vektor}, \vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi} = \text{div}(\vec{\varphi}) = \text{Skalar}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Also folgt die Poisson-Gleichung:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Daraus folgt für den Ladungsfreien Raum, d.h.  $\rho = 0$ , die Laplace-Gleichung:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$$

$\varphi$  im Außenraum um einen Leiter muss Lösung dieser Differentialgleichung sein!

**Bemerkung:**

$$\vec{\nabla}^2 = \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2}$$

In Polarkoordinaten  $r, \theta, \gamma$ :  $\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}$

*Mathematisches Problem:*

Lösung einer Differentialgleichung mit Randbedingungen  $\varphi = \text{const.}$  auf Oberfläche,  $\varphi = 0$  im Unendlichen,  $\Delta \varphi = \vec{\nabla}^2 \varphi = 0$  im Außen- und Innenraum ( $\rho = 0$ ).

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$  hat nur für wenige symmetrische Beispiele exakte mathematische Lösung.

### 3.6.2 EINDEUTIGKEITSSATZ DER ELEKTROSTATIK

Ist für ein elektrostatisches Problem eine Lösung  $(x, y, z)$  bekannt, so ist dies zugleich die einzig mögliche Lösung.

## 3.7 FELDELEKTRONEN-MIKROSKOP

(Müller, 1990)



Über Vakuum und einen Fluoreszierenden Schirm wird eine Vergrößerung von kristallinen Strukturen ermöglicht. Die Vergrößerung entspricht  $\frac{r_{\text{schirm}}}{r_{\text{spitze}}}$ . Das erzeugte  $E$  Feld folgt aus  $\frac{U}{r}$  (angesetzte Spannung durch Radius der Innenkugel).

### 3.8 RASTERTUNNELMIKROSKOP

(Binnig, Rohrer, Nobelpreis 1986)

### 3.9 DER FARADAY'SCHE KÄFIG

Das Feld innerhalb von Hohlräumen in einem elektrischen Leiter ist Null.

Aus Gauß'schen Satz folgt, dass Gesamtladung im Hohlraum Null sein muss. Es könnte sich gegenseitig kompensierende Oberflächenladungen geben, die ein Feld im Hohlraum hervorrufen.

Es gilt:  $\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$  (Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes)

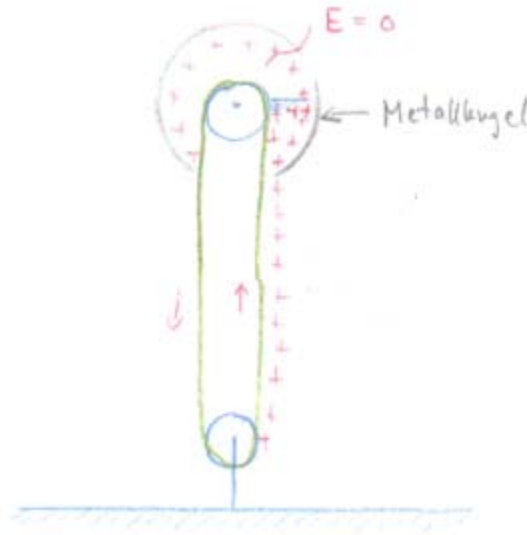
Betrachten Integration längs  $C$ :

Da im Leiter  $E = 0$ , ist in diesem Bereich  $\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$ . Damit  $\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$  gilt, muss auch für den Hohlraum gelten:  $\oint_C \vec{E} d\vec{r}$

Da dies für beliebige Kurven  $C$  gelten muss, folgt  $E = 0$  im Hohlraum.

#### 3.9.1 VAN-DE-GRAAFF-GENERATOR

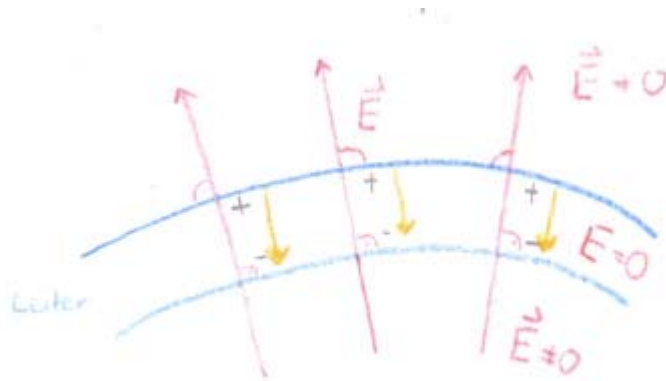
Bis zu 10 Millionen Volt möglich. Ladungsübertragung im feldfreien Hohlraum einer Metallkugel.



Metallkugel kann über feldfreien Raum auf wesentlich höheres Potential aufgeladen werden, als es der Spannungsquelle entspricht. Aufladung auf Megavolt möglich; Verfahren wird zum Bau von Teilchenbeschleunigern genutzt.

### 3.10 INFLUENZ

Elektrisch neutraler Leiter im elektrischen Feld.



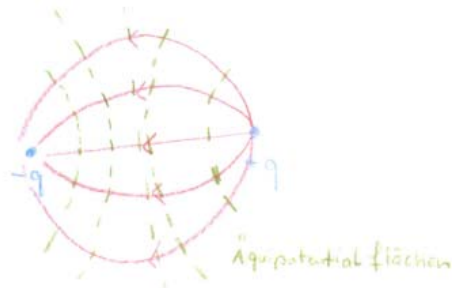
Durch  $\vec{E}$  verschiedene Ladungsträger sammeln sich an Oberfläche; erzeugen Feld, das das angelegte Feld im Inneren kompensiert.

### 3.11 BIDLADUNG

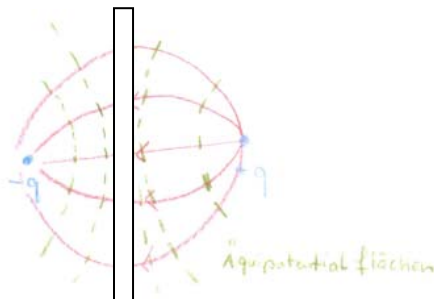
Gauß'scher Satz ist gut anwendbar bei Ortsfester Ladungsverteilung. Problematisch bei Leitern, da Ladungen frei beweglich.

#### 3.11.1 KONZEPT DER BIDLADUNG:

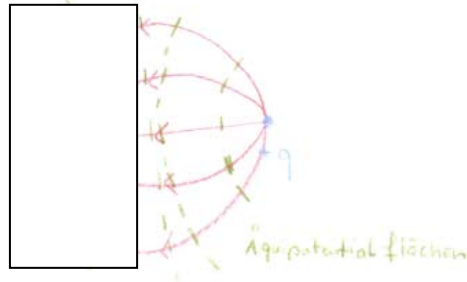
Dipol:



Dipolfeld wird nicht geändert:



Feld wird nicht verändert, wenn Ladung  $-q$  entfernt wird:



Feldlinien haben gleichen Verlauf, als ob sich im gleichen Abstand hinter der Metalloberfläche eine Ladung  $-q$  befände (Bildladung).

### 3.12 DIE ENERGIE DES ELEKTRISCHEN FELDES

*Gespeicherte Energie in einem Kondensator:*

Arbeit, die aufgewendet werden muss um den Kondensator vom ungeladenen Zustand auf die Ladung  $\pm Q$  aufzuladen, also Spannung  $U = \frac{Q}{C}$  wird aufgebaut.

$$W = \int_0^Q U(Q') dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

Mit (2.5)  $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$  und (2.6)  $U = E \cdot d$  folgt

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Mit  $V = A \cdot d$ . Dies wird als Energiedichte des elektrischen Feldes bezeichnet.

Die Gleichung (2.22) gilt allgemein für die Energiedichte jedes beliebigen elektrischen Feldes.

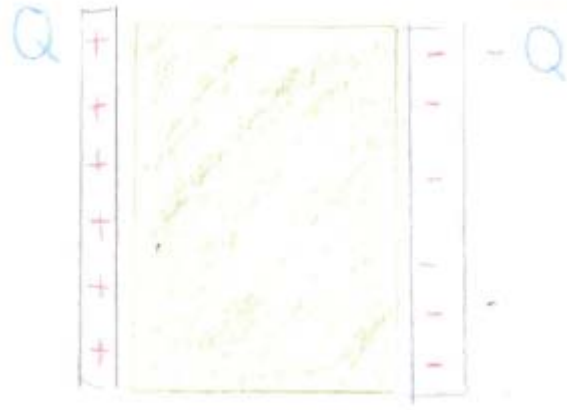
Zum Aufbau eines beliebigen Systems von Ladungen erforderliche Gesamtarbeit (aus 2.22):

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$$

$$W = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$$

## 4 MATERIE IM ELEKTRISCHEN FELD

Dielektrikum: elektrisch nicht leitendes Material (Isolator, keine Influenzerscheinung)



Spannung  $U$  sinkt ab, wenn ein nicht leitendes Medium in den Zwischenraum eines Kondensators gebracht wird.

$$Q = \text{const.}, Q = C_0 U_0 = C_M U_M$$

Definition:

$$\varepsilon_r = \frac{C_M}{C_0} = \frac{U_0}{U_M}$$

(„Dielektrizitätszahl“ oder „relative Dielektrizitätskonstante“)

Es gilt:  $\varepsilon_r > 1$ . Mit  $\frac{U_0}{U_M} = \frac{E_0}{E_M}$  folgt  $E_M = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$ .

Gleichung (2.9) für die Kapazität wird zu

$$C_M = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

Wobei  $\varepsilon$  die absolute Dielektrizitätskonstante darstellt.

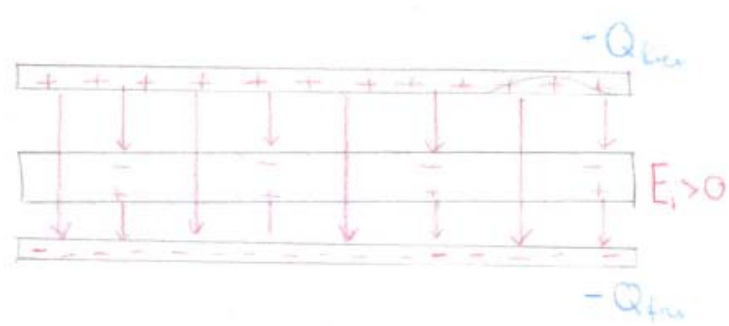
## 4.1 ELEKTROSTATIK IN EINEM DIELEKTRIKUM

*Polarisierbarkeit:*

Eigenschaft eines Dielektrikums ein angelegtes elektrisches Feld zu beeinflussen.

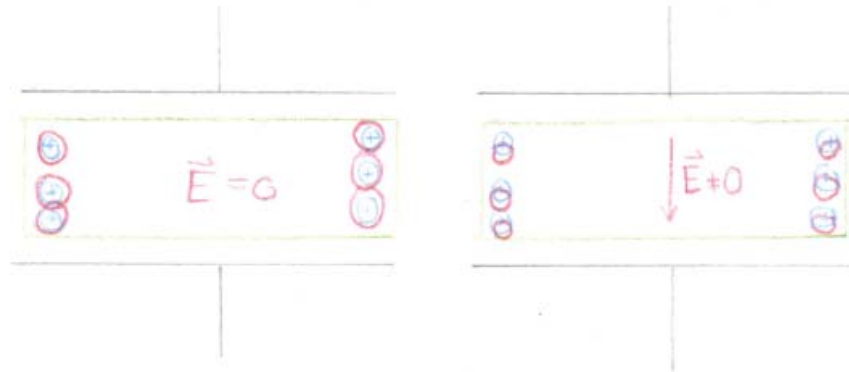
⇒ Polarisationsoberflächenladungen schwächen das Elektrische Feld.

Die Ladungen können durch zwei Effekte gebildet werden.



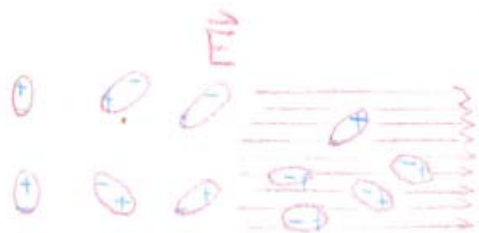
a) *Verschiebungspolarisation*

Entstehen von induzierten Dipolmomenten durch die Verschiebung von positiven und negativen Ladungsschwerpunkten.



b) *Orientierungspolarisation*

Eventuell vorhandene polare Moleküle, die infolge von Wärmebewegungen ungeordnet sind, werden im Feld teilweise ausgerichtet.





### 4.1.1 POLARISATION $\vec{P}$

$\vec{P}$  := Dipolmoment pro Volumenelement

$\vec{p}_e$  := induziertes atomares Dipolmoment

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$$

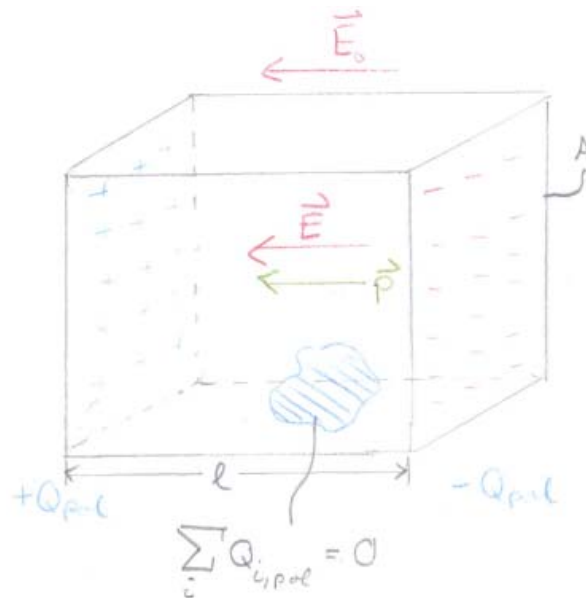
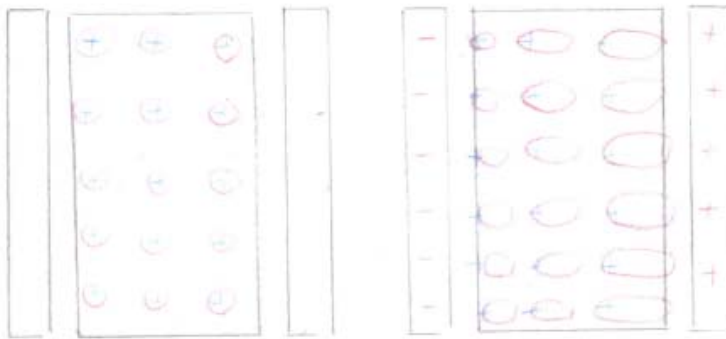
Wobei  $\alpha$  die atomare Polarisierbarkeit darstellt.

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p}_e = N \cdot \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$$

Teilchendichte  $N$  (gilt nur für Gase)

$$[P] = \frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2}$$

Dielektrischer Block



Die Netto-Polarisationsladung ist im Innern in jedem makroskopischen Volumen Null. Nur an Grenzflächen tritt Oberflächenladung  $Q_{pol}$  auf.

Gesamtes Dipolmoment des Blockes ist gegeben durch

$$|Q_{pol}| \cdot l = P \cdot V = P \cdot A \cdot l$$

$$P = \frac{|Q_{pol}|}{A} = |\sigma_{pol}|$$

Bei homogener Polarisation ist der Betrag des Dipolmoments pro Volumeneinheit gleich der Flächenladungsdichte der Polarisationsladung  $|\sigma_{pol}|$ .

Führen Feldvektor  $\vec{P}^*$  (elektrische Polarisation) ein, der die Änderung des elektrischen Feldes, aufgrund der auftretenden Polarisation, beschreibt.

$$\oint \vec{P}^* \cdot d\vec{A} = -Q_{pol}$$

„Gauß'sches Gesetz für Polarisationsladungen.“

Minuszeichen bedeutet dabei:  $\vec{P}^*$  weist von negativen zu positiven Ladungen. Im Inneren des Blockes gilt bei homogener Polarisation

$$|\vec{P}^*| = |\sigma_{pol}|$$

Im Außenraum  $|\vec{P}^*| = 0$ , das heißt:

$$\vec{P}^* = \vec{P}$$

Insgesamt erhält man für die Gesamtladung das Gaußsche Gesetz:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} = Q_{gesamt} = Q_{frei} + Q_{pol}$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} = Q_{frei} - \oint \vec{P} d\vec{A}$$

$$\oint (\vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P}) d\vec{A} = Q_{frei}$$

Es ist bequem, den Vektor der „dielektrischen Verschiebung“ zu definieren:

$$\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{frei}$$

⇒ Die Quellen für  $\vec{D}$  sind nur die freien Ladungen.  $\vec{D}$  ist unabhängig davon, ob ein Dielektrikum vorhanden ist oder nicht.

### **Bemerkungen:**

$Q_{frei}$ : frei bewegliche Ladungen (z.B.: auf den Platten eines Kondensators)

$Q_{pol}$ : Polarisationsladungen – sind Bestandteile der Atome oder Moleküle des Dielektrikums. Sind mehr oder weniger elastisch gebunden → Gebundene Ladungen.

### 4.1.2 ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITÄT

In homogenen isotropen Dielektrika hat  $\vec{P}$  die Richtung von  $\vec{E}$  und ist in weiten Grenzen proportional zu  $\vec{E}$ .

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

Materialgleichung für dielektrisches Medium

Wobei  $\chi_e$  die elektrische Suszeptibilität darstellt, mit  $[\chi_e] = 1$ . Dabei ist, wenn  $\chi_e$  unabhängig von  $\vec{E}$ , das Medium ein dielektrisches Medium – also Isolator. Falls  $\chi_e$  konstant ist, handelt es sich um ein isotropes Medium.

Allgemein:  $\vec{P} = \vec{\chi}_e \epsilon_0 \vec{E}$

Für auch anisotrope Medien – wobei  $\vec{\chi}_e$  einen Tensor darstellt.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

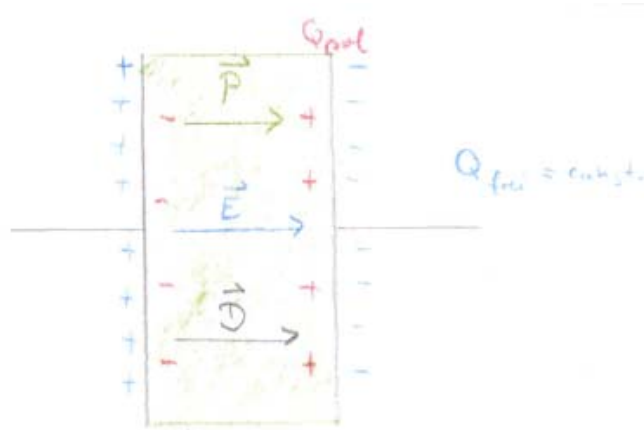
Dabei ist  $\vec{E}$  die Feldstärke im Inneren des Mediums mit absoluter Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ .

Im Vakuum gilt ( $\vec{P} = 0$ ):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

## 4.1.3 PLATTENKONDENSATOR MIT UND OHNE FÜLLUNG

( $\vec{E}_0$  = Vakuumsfeldstärke)



Dielektrische Verschiebung:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

$$\vec{E} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

Berechnung der Feldstärke im Plattenkondensator

a) Vakuum  $E_0 = \frac{\sigma_{frei}}{\varepsilon_0}$  (über Gaußschen Satz)

oder aus (3.11):  $D = \varepsilon_0 E_0 = \sigma_{frei} \Rightarrow E_0 = \frac{\sigma_{frei}}{\varepsilon_0}$

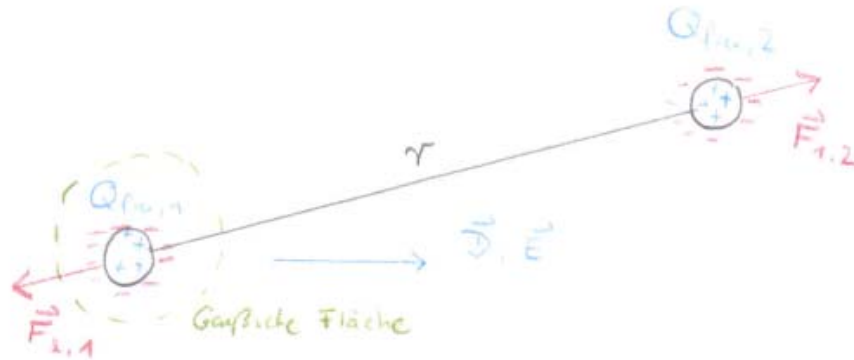
b) Dielektrisches Medium

aus (3.7):  $E = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma_{frei} + \sigma_{pot}), \text{sign}(\sigma_{frei}) \neq \text{sign}(\sigma_{pot})$

oder aus (3.13) und (3.11):  $D = \varepsilon E = \sigma_{frei} \Rightarrow E = \frac{\sigma_{frei}}{\varepsilon}$

Anwendung:

Kraft zwischen Ladungen im dielektrischen Medium:



Vernachlässigung der gegenseitigen Influenzwirkung

Durch Kugel 1 hervorgerufenen Elektrisches Feld im Abstand  $r$ :

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{frei,1}$$

Wegen Kugelsymmetrie:

$$D = \frac{Q_{frei,1}}{4\pi r^2} = \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q_{frei,1}}{r^2}, F_{1,2} = Q_{frei,2} \cdot E$$

$$\Rightarrow F_{1,2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q_{frei,1} Q_{frei,2}}{r^2}$$

$F_{1,2}$  ist um Faktor  $\frac{1}{\epsilon_r}$  reduziert gegenüber Vakuum.

Allgemein gilt:

Bei Erfüllung des Raumes durch isolierte geladene Leiter ( $Q_{frei} = const.$ ) mit homogenem Dielektrikum sinken Feldstärke, Potentiale, gegenseitige Kräfte und Feldenergien um den Faktor  $\frac{1}{\epsilon_r}$ .

**Bemerkungen:**

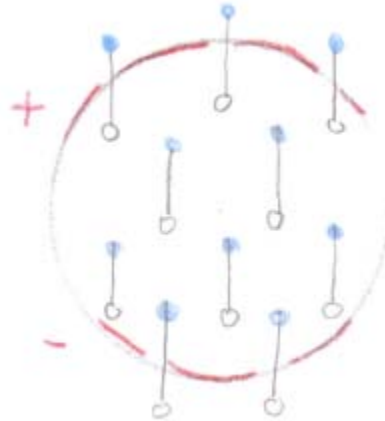
$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$ ,  $\epsilon$  ist Skalar; Für isotrope dielektrische Medien.

$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$  gilt allgemein für polarisierbare Medien.

Beispielsubstanzen:

Substanz	Dielektrizitätskonstante
Luft	1,00059 (0° C, 1 bar)
HCl	1,0046 (0° C, 1 bar)
H <sub>2</sub> O	1,0126 (111° C, 1 bar)
H <sub>2</sub> O	80,0 (flüssig, 20° C)
Parafin	2,1 (Wachs, 20° C)
SrTiO <sub>3</sub>	12000 (Kristall, 10 K)

## 4.2 DAS FELD EINER POLARISIERTEN KUGEL



Im Inneren der Kugel ist die gemittelte Ladung Null.

Bei makroskopischen, quasi kontinuierlicher Ladungsverteilung:

Verschiebung von positiv und negativ geladener Kugel gegeneinander um Länge  $\delta$ .



$\vec{P}$  sei von Betrag und Richtung im ganzen Volumen konstant. Wegen Kugelsymmetrie ist das Feld der Kugel gleich dem eines Dipols am Ursprung bei der gesamten in Punkten konzentrierter positiver und negativer Ladung  $\pm Q_{ges}$  um Strecke  $\delta$  gegeneinander verschoben ist:

$$Q_{ges} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 N Q$$

**Dipolmoment:**

$$\vec{p}_0 = Q_{ges} \vec{\delta} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 N Q \vec{\delta}$$

$\vec{P} = N Q \vec{\delta}$ ,  $N$  = Teilchendichte,  $|\vec{p}| = |\sigma_{pot}|$  Oberflächenladungsdichte

Nach (1.22) ist das Potential eines Dipols mit Dipolmoment,  $\vec{p}_0$  im Abstand  $r$ : (Fernfeldnäherung  $\delta \ll r_0$ )

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r_0^3} z$$

Mit (3.17) folgt dann:

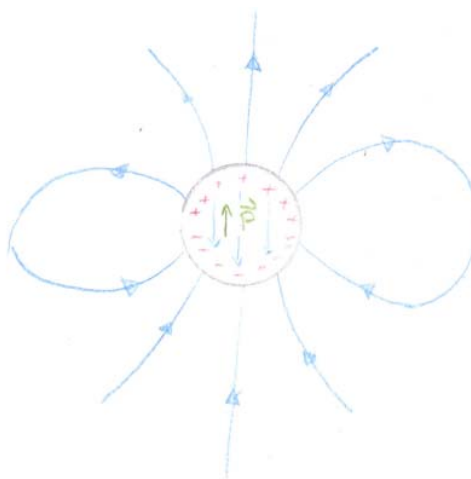
$$\varphi = \frac{p}{3\epsilon_0} z$$

Potential eines homogenen Elektrischen Feldes in  $-z$ -Richtung.

(Potential an Kugeloberfläche  $r_0$ )

Damit ist das (homogene) Feld in der Kugel:

$$\vec{E}_{Kugel} = -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi \vec{e}_z = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$



Innerhalb:

Feld ist in der Kugel homogen und konstant

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Außerhalb:

Feld eines Dipols mit Dipolmoment

$$\vec{p}_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \vec{p}$$

Befindet sich die Kugel in einem homogenen äußeren Feld  $\vec{E}_0$ , muss nach dem Superpositionsprinzip dieses noch zu  $\vec{E}$  hinzu addiert werden.

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{Kugel}$$



### 4.3 DIE DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE EINES DICHTEN MEDIUMS

Mikroskopische (atomare) Betrachtung:

$$\vec{P} = N\vec{p}_e = N\epsilon_0\alpha\vec{E}$$

Mit:

$N$  = Zahl der Atome pro Volumeneinheit,  $\alpha$  = atomare Polarisierbarkeit

Dies gilt nur näherungsweise für Gase!

$$\chi_e = N\alpha \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$$

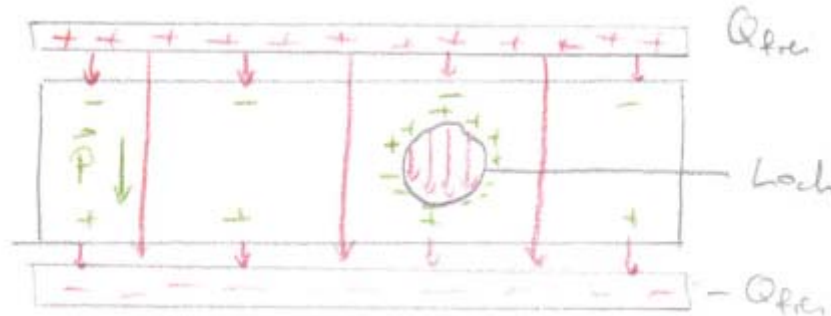
Als elektrisches Feld im Dielektrikum hatten wir aufgrund der Polarisationsladungen (siehe (3.5)) erhalten:

$$E = \frac{\sigma_{frei} + \sigma_{pol}}{\epsilon_0}$$



### 4.3.1 DICHTES MEDIUM (FLÜSSIGKEIT)

Jedes Atom (Molekül) ist in einem isotropen Isolator so von Nachbaratomen umgeben, dass es in einem nahezu kugelförmigen Hohlraum sitzt.



Betrachten  $\vec{E}_{Loch}$ :

Aus Superpositionsprinzip ergibt sich:

$$\vec{E}_{Loch} = \vec{E} - \vec{E}_{Kugel}$$

Also mit (3.19) für  $\vec{E}_{Kugel}$ :

$$\vec{E}_{Loch} = \vec{E} - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Mit (3.3) erhält man für die Polarisierung im Hohlraum:

$$\vec{P} = N\alpha\epsilon_0\vec{E}_{Loch} = N\alpha\epsilon_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right)$$

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - N\frac{\alpha}{3}}\epsilon_0\vec{E}$$

Also ist  $\chi_e = \frac{N\alpha}{1 - N\frac{\alpha}{3}}$  mit (3.13) ergibt sich aus  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  für dichte Medien:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{1 - N\frac{\alpha}{3}}$$

(Clausius-Mosotti-Beziehung)

Falls  $N\frac{\alpha}{3} \ll 1$  (zum Beispiel bei Gasen mit kleinen Dichten), dann ist:

$$\chi_e = N\alpha$$

## 4.4 DIE ORIENTIERUNGSPOLARISATION: PARAELEKTRIZITÄT

Molekulare Gase mit permanenten Dipolen, zum Beispiel HCl, NH<sub>3</sub>.

### 4.4.1 DIPOL IM HOMOGENEN ELEKTRISCHEN FELD (SIEHE 1.5)

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

Potentielle Energie:

$$W_e = -\vec{p}_e \vec{E}$$

## 4.5 DIPOL IM INHOMOGENEN ELEKTRISCHEN FELD

Betrachten als Beispiel Feld einer Punktladung:

a) Kraft auf Dipol, der in Richtung von  $\vec{E}$  liegt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}^+ + \vec{F}^- = Q\Delta\vec{E} \cong Q \frac{d\vec{E}}{dr} \Delta r$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = p_e \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dr}$$

Feld nimmt mit  $\vec{r}$  ab  $\Rightarrow \frac{d\vec{E}}{dr}$  ist negativ.

Dipol erfährt Kraft, die ihn in den Bereich höherer Feldstärke zieht.

Allgemein gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = p_e \vec{\nabla} E$$

b) Kraft auf Dipol, der nicht längs von  $\vec{E}$  angeordnet ist:

$$\Delta\vec{E} \cong \frac{d\vec{E}}{dr} \Delta r, \Delta r = a \cos \alpha, \alpha = \sphericalangle(\vec{E}, \vec{p}_e)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = p_e \frac{d\vec{E}(\vec{r})}{dr} \cos \alpha$$

Auch nichtpolare Moleküle besitzen im elektrischen Feld ein induziertes Dipolmoment.

Auch nichtpolare Atome oder Moleküle werden in Richtung des wachsenden Feldes gezogen.

Konkurrenz zwischen:

- Wärmebewegung aufgrund thermischer Energie, welche die Ausrichtung der Dipole zerstört
- Ausrichtung im elektrischen Feld – bei paraelektrischen Medien

In paraelektrischen Medien ist die elektrische Suszeptibilität *temperaturabhängig*:

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} = \frac{N p_e^2}{3 \epsilon_0 k_B T} \vec{E} \sim \frac{1}{T} \vec{E}$$

(Curie-Verhalten)

Mit:

$N$  Moleküldichte,  $p_e$  Dipolmoment eines Moleküls,  $k_B$  Boltzmann-Konstante

*Bemerkung:*

*Auch die paramagnetische Suszeptibilität zeigt ein Curie-Verhalten.*

## 4.6 ELEKTRISCHE POLARISATION IN FESTKÖRPERN

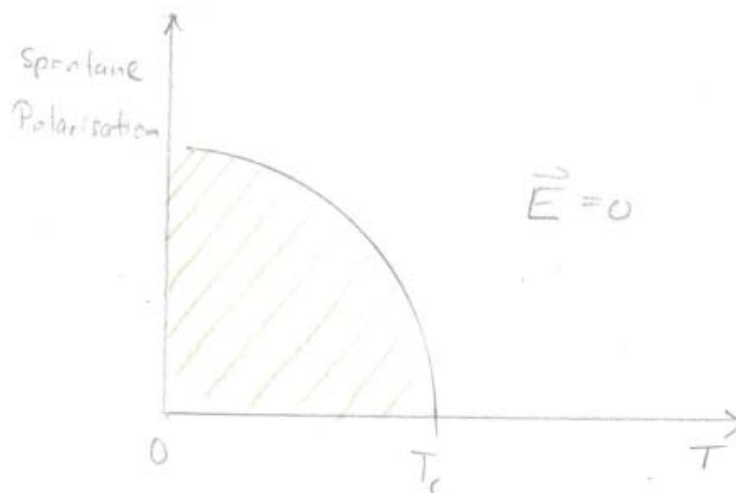
### Ferroelektrizität

Kristalle, die oberhalb einer Kritischen Temperatur  $T_C$  paraelektrisch sind. Unterhalb der kritischen Temperatur richten sich spontan alle Dipole aus ( $\chi_e \rightarrow \infty$ ). Also tritt auch ohne Feld eine makroskopische Polarisation auf.

$$\chi_e^{ferro} \sim \frac{1}{T - T_C}$$

*Beispiel:*

BaTiO<sub>3</sub> Bariumtitanat,  $T_C = 115^\circ\text{C}$



### 4.6.1 PIEZO- UND PYROELEKTRISCHER EFFEKT

Polarisation im Kristall kann durch Anwendung von Druck geändert werden.

*Beispiel:*

Quarzkristall ( $\text{SiO}_2$ ) (Piezoelektrisch aber nicht Ferroelektrisch) ist aus folgenden Einheitszellen aufgebaut:

Kristall hat Oberflächenladung, die normalerweise durch Ladungen aus der umgebenden Atmosphäre neutralisiert werden, weshalb die Ladungen experimentell schwer nachweisbar sind. Anwendung von Druck ändert die Polarisation, womit sich die Oberflächenladung ändert. Diese Änderung kann experimentell nachgewiesen werden.

„Umgekehrte Anwendung“:

Anlegen einer Wechselspannung an z.B. einen Quarzkristall führt zu Schwingungen der Atome gegeneinander. Dies ist z.B. bei der Erzeugung von Ultraschall (bis zu 100 GHz als z.B. Piezoelektrischer Filter für Nachrichtentechnik, durch Wechselspannung) nützlich.

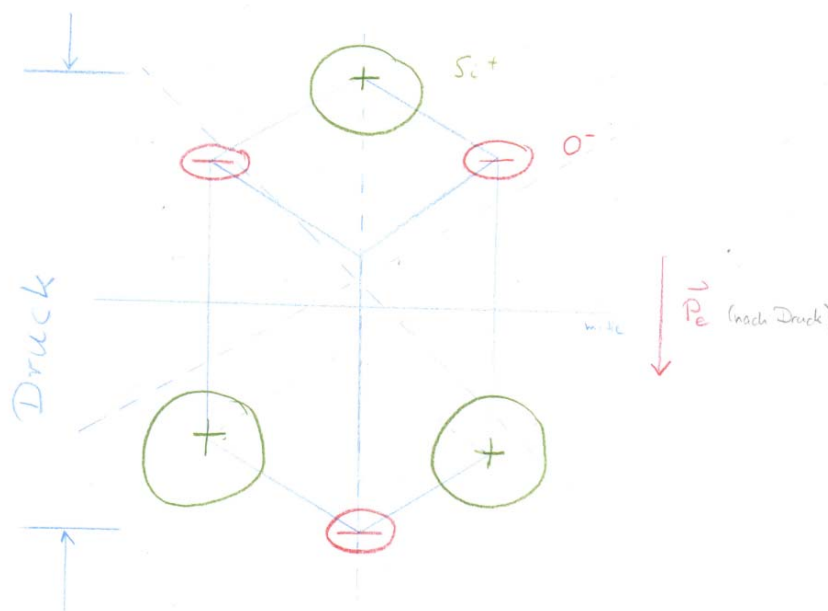
Beim Anlegen einer Gleichspannung kann man eine definierte Längenänderung des Kristalls (im Nanometer Bereich) erreichen, weshalb zum Beispiel Stellelemente für Rastersondenmethoden diese Methode nutzen.

*Beispiel:*

Bariumtitanat ( $\text{BaTiO}_3$ ) (ist Piezoelektrisch und Ferroelektrisch)

$$T_C = 115^\circ\text{C}$$

Einheitszelle:



## 5 DER ELEKTRISCHE STROM

### 5.1 STROMSTÄRKE, STROMDICHTE, KONTINUITÄTSGLEICHUNG

Potentialdifferenz zwischen Enden eines Leiters – aufrechterhalten durch ständige Nachlieferung von Ladungsträgern (über Spannungsquelle) – verursacht einen stationären elektrischen Strom.

$\varphi(x)$  im homogenen, Strom durchflossenen Leiter fällt linear in konventioneller Stromrichtung ab.

$$E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \text{const.}$$

$$E = -\frac{\varphi(x_a) - \varphi(x_b)}{x_a - x_b} = \frac{\varphi(x_a) - \varphi(x_b)}{x_b - x_a} = \frac{U}{l}$$

*Definition der Stromstärke I:*

Stromstärke ist gleich dem Ladungsfluss (Ladung pro Zeit) durch die Querschnittsfläche  $A$  des Leiters.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Bei stationären Strömen ist  $I$  durch jeden Gesamtquerschnitt des Leiters gleich.

Einheit der Stromstärke:  $[I] = \frac{C}{s} = 1A$

*Konventionelle Stromrichtung:*

Vom Pluspol zum Minuspol (Elektronen laufen entgegengesetzt).

Ladung die in der Zeit  $t = t_2 - t_1$  vom Strom transportiert wird:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

*Mikroskopische Betrachtung:*

Bewegung der Ladungsträger mit Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$ . Einführung der Stromdichte  $\vec{j}$ . Betrachten zunächst Spezialfall, dass sich alle Ladungsträger mit der gleichen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen:

Je Zeiteinheit durch den Rahmen strömende Ladung:

$$I = \frac{Qn(\vec{A}\vec{v}\Delta t)}{\Delta t} = nQ\vec{A}\vec{v}$$

Hat man mehrere Ladungsarten (z.B. positive und negative), so summiert man die einzelnen Beiträge auf:

$$I = n_1 Q_1 \vec{A} \vec{v}_1 + \dots + n_m Q_m \vec{A} \vec{v}_m = \vec{A} \sum_k n_k Q_k \vec{v}_k$$

Als Stromdichte  $\vec{j}$  (für eine Ladungsträgerart) definiert man

$$\vec{j} = nQ\vec{v}$$

Als Ladung pro Zeit und Fläche mit Einheit:  $[j] = \frac{C}{m^2 s} = \frac{A}{m^2}$

Im Allgemeinen bewegen sich die Elektronen in einem Leiter aufgrund der thermischen Energie sehr schnell in *beliebige* Richtungen. Die gemittelte Geschwindigkeit mit der sich die gesamte Elektronenverteilung aufgrund der angelegten Spannung in eine Richtung bewegt, nennt man Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$ . Damit wird (4.7) zu:

$$\vec{j} = nQ\vec{v}_D$$

*Beispiel:*

$$\text{Cu, } T = 300\text{K, } j = 10^6 \frac{A}{m^2}, n = 10^{23} \frac{e}{cm^3}$$

Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$ . geteilt durch gemittelte Geschwindigkeit:  $\frac{\vec{v}_D}{v_{tm}} \approx 10^{-10}$ .

Daraus resultiert  $\vec{v}_D \approx \frac{mm}{s}$ . Für Elektronen  $Q = -e$ :

$$\vec{j} = -e \cdot n_e \vec{v}_D$$

*Stationäre Ströme:*

Strom durch Fläche  $A$

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Stationärer Strom heißt, dass  $\vec{j}$  überall (zeitlich) konstant ist, d.h. es tritt keine Ladungsakkumulationen auf.

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$$

Äquivalent zu  $\text{div } \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ .

Wegen Ladungsverteilung muss für Stationäre Ströme gelten:

$$\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

(Kontinuitätsgleichung)

Dabei stellt die linke Seite den Ladungsfluss durch eine geschlossene Fläche  $A$  dar, während die rechte Seite die zeitliche Änderung der Ladung im Volumen  $V$  angibt. Das ganze ist eine Folgerung aus dem Gaußschen Integralsatz:

$$\oint_A \vec{F} d\vec{A} = \int_{V(A)} \vec{\nabla} \vec{F} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 5.2 ELEKTRISCHER WIDERSTAND

Aus Experimenten folgt:  $I = f(U)$

Für viele leitende Medien gilt speziell das Ohm'sche Gesetz:

$$I = c \cdot U$$

(Integralform des Ohm'schen Gesetzes)

*Definition:*

$$R := \frac{U}{I}$$

„elektrischer Widerstand“ mit Einheit  $\frac{Vs}{C} = \frac{V}{A} = 1\Omega$  (sprich Ohm).

Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für eine Vielzahl von Leitern ist reine Erfahrungstatsache und keine Konsequenz der fundamentalen Gesetze über Felder.

*Differentielle Form des Ohm'schen Gesetzes:*

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$ : elektrische Leitfähigkeit mit Einheit  $\frac{1}{\Omega m}$ . Einführung von  $\varrho := \frac{1}{\sigma}$  mit Einheit  $\Omega m$  als spezifischen Widerstand. Medien (Leiter) für die  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  gilt, werden Ohm'sche Medien (Leiter) genannt.

Dabei ist  $\vec{\sigma}$  ein Tensor in anisotropen Medien, Funktion  $\sigma = \sigma(\vec{r})$  in inhomogenen Medien und in homogenen, isotropen Medien ein Skalar  $\sigma = \text{const.}$

Berechnung von  $R$  für homogene isotrope Leiter (Ohm'scher Leiter), zum Beispiel Metall mit konstantem Querschnitt  $A$ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A} = \vec{j} \vec{A} = jA, \vec{j} \parallel \vec{A}$$

$$I = \sigma AE$$

Mit  $U = \varphi_2 - \varphi_1 = El$  folgt

$$\frac{U}{I} = \frac{El}{\sigma EA} = \frac{l}{\sigma A} = \frac{\rho l}{A} = R$$

Die bei großen Stromdichten unter Umständen beobachtete Abhängigkeit  $R = R(U)$  ist häufig nur vorgetäuscht durch die Temperaturabhängigkeit  $\sigma = \sigma(t)$ .

$RI = U$  wird Spannungsabfall am Widerstand genannt.

### 5.3 TEMPERATURABHÄNGIGKEIT VON WIDERSTÄNDEN

Die Leitfähigkeit und damit auch der elektrische Widerstand sind Temperaturabhängig:

$$R(T) = R_0(1 + \gamma T)$$

(Für kleine Temperaturintervalle)

Mit  $\gamma$  als Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes. (Einheit  $K^{-1}$ )

Durch Stromwärme treten im Leiter Temperaturänderungen auf, daher:

*Supraleitung:*

Sprunghafte Änderung der  $R(T)$  bzw  $\rho(T)$ -Kurve bei kleinen Temperaturen (Sprungtemperatur, Kritische Temperatur)

Kritische Temperatur für einige Substanzen:

	<b>Nb</b>	<b>Pb</b>	<b>Hg</b>	<b>Zn</b>	<b>Nb<sub>3</sub>Sn</b>	<b>YBaCuO</b>
$T_c/K$	9,46	7,18	4,15	0,85	18,05	>190K



## 5.4 ELEKTRISCHE LEISTUNG DES STROMES IN EINEM WIDERSTAND, STROMWÄRME

$qU = W$  ist die Arbeit, die das elektrische Feld an Ladung  $q$  beim Durchlaufen einer Potentialdifferenz  $U$  leistet (siehe 1.9). Mit  $I = \frac{dq}{dt}$  folgt als Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} U = IU$$

Für Ohm'sche Leiter gilt:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Weiterhin gilt dass die Elektrische Leistung pro Volumen gleich der Stromwärme pro Volumen mal Zeit ist.

$$\frac{P}{V} = \vec{j} \vec{E} = \sigma \vec{E}^2$$

## 5.5 MIKROSKOPISCHES MODELL FÜR DAS OHM'SCHE GESETZ

(Drude-Modell)

Aus (4.8) und (4.15) folgt durch  $\vec{j} = nQ\vec{v}_D$  und  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  dass die Driftgeschwindigkeit der Elektronen bei  $\vec{E} = 0$  gleich 0 ist, also nur noch thermische Bewegung der Elektronen vorhanden ist.

$$\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_D > 0$$

*Modell:*

Elektronen werden nach mittlerer Streuzeit  $\tau$  gestreut, durch Stöße mit anderen Elektronen oder Ionen entsteht Reibungskraft.

*Bewegungsgleichung für Elektron:*

$$m\vec{a} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = -e\vec{E}$$

Geschwindigkeit ist also proportional zur Reibungskraft. Im Stationären Feld gilt, dass  $m\vec{a} = 0$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_D$ . Daraus folgt:

$$\frac{m\vec{v}_D}{\tau} = -e\vec{E}$$

$$\vec{v}_D = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$$

Allgemein:

$$\vec{v}_D = \frac{Q\tau}{m} \vec{E}$$

$\mu$  heißt Beweglichkeit:

$$\mu = \frac{Q\tau}{m}$$

Mit (4.8) folgt:

$$\vec{j} = nQ\vec{v}_D = \frac{nQ^2\tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{nQ^2\tau}{m} = Qn\mu$$

Mit mehrfachen Ladungsträgerarten (z.B. positive und negative) gilt:

## 5.6 GLEICHSTROMKREIS

Stationäre Leiterströme sind im rein konservativen Feld ( $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ ) nicht möglich, da Energieverlust in Form von Stromwärme auftritt.

Elektromotorische Kraft nicht elektrische Energie wird durch Ladungstrennung in elektrische Energie überführt (Batterie, Van-der-Graaf-Generator, Dynamo,...).

*Innenwiderstand  $R_i$  einer Spannungsquelle:*

Energieverlust im Inneren einer Spannungsquelle bei Stromfluss.

$$U^{(e)} = IR_i + IR_L = I(R_i + R_L), I = \frac{U^{(e)}}{R_i + R_L}$$

Klemmspannung  $U_{kl}$ :

$$U_{kl} = U^{(e)} - IR_i = U^{(e)} \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

a) Stromlosigkeit  $I = 0$

$$U_{kl} = U^{(e)}$$

Sogenannte Leerlaufspannung.

b) Große Belastung  $R_L \rightarrow 0, U_{kl} \rightarrow 0$

$$I = \frac{U^{(e)}}{R_i}$$

Kurzschlussstrom.

Maximale Leistung am Lastwiderstand:

$$P_L = IU_{kl} = \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} U^{(e)2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U^{(e)2} \frac{(R_i - R_L)}{(R_i + R_L)^3}$$

Also ist  $P_L$  maximal bei  $R_i = R_L$ .

Kirchhoffsche Regeln:

Verknüpfung von Strömen, Widerständen und Spannungen in Netzwerken.

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \Rightarrow U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

(Mit Vorzeichen in Umlaufrichtung) – Betrachten Knoten für Stationäre Ströme:

$$\oint \vec{j} d\vec{A} = 0$$

Also folgt:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Allgemein:

**Knotenregel**

$$\sum_i I_i = 0$$

**Maschenregel**

$$\sum_i U_i = 0$$

a) Einzelmasche (keine Stromverzweigung)

Von Elektromotorischer Kraft vermittelte Arbeit pro Ladung ist gleich der an Kreiselementen abgegebener Arbeit pro Ladungseinheit

$$\sum_i U_i^{(e)} = \sum_k I_k R_k$$

b) Kreise mit Stromverzweigung

Masche 1:

$$U_1^{(e)} = I_1 R_{i,1} + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$$

Masche 2:

$$U_2^{(e)} = -I_3 R_3 + I_2 R_2 + I_2 R_{i,2} = 0$$

- *Ströme und Spannungen in einem Netzwerk*
- *Kirchhoffsche Regeln*
- *Lösen eines linearen Gleichungssystems*

Aus den kirchhoffschen Regeln folgt:

**Reihenschaltung**

$$R = \sum_k R_k$$

**Parallelschaltung**

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

## 5.7 ELEKTROLYTISCHE LEITUNG

Elektrylot ist ein Leiter, bei dem bei Stromdurchgang Zersetzung auftritt, wie z.B. bei NaCl in Wasser.

a) Ladungstransport

Strom wird durch positive und negative Ionen getragen:

$$I = A(Z_+ e N_+ v_{D,+} + Z_- e N_- v_{D,-})$$

Stromdichte  $\vec{j}$  konstant über Fläche  $A$ . Dabei ist  $Z$  die elektrochemische Wertigkeit,  $N$  die Dichte und  $v_D$  die Driftgeschwindigkeit.

Binärer Elektrolyt:

$$Z_+ = Z_- = Z, N_+ = N_- = N$$

Mit (4.21) und (4.23) folgt:

$$I = AZeN(|\mu_+| + |\mu_-|)E = \sigma \frac{U}{l/A} = \frac{U}{R}$$

Mit Beweglichkeit  $\mu_{+/-}$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = ZeN(|\mu_+| + |\mu_-|)$$

$\sigma \propto N$  gilt nur für geringe Konzentrationen und Elektrolyte haben einen negativen Temperaturkoeffizienten.

$$\sigma_{\text{elektrolyt}} \ll \sigma_{\text{metall}}$$

Elektrolytische Leitung ist durch Auftreten einer Polarisationsspannung  $U_p$  gekennzeichnet:

$$I = \frac{U - U_p}{R}$$

b) Massentransport

Faraday-Konstante, Faraday-Gesetze

Z-wertiges Ion mit Masse  $m_I$  gibt bei Neutralisation an Elektrode die Ladung  $q = Ze$  ab.

$$\frac{m}{Q} = \frac{m_I}{Ze}$$

Oder

$$m = \frac{m_I}{Ze} It, m_I = \frac{M}{N_A}, N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Ä:  $\frac{M}{zF}$ , elektrochemisch Äquivalent mit Faraday Konstante:

$$F = N_A e = 96,5 \cdot 10^3 \frac{C}{\text{mol}}$$

$$m = \frac{M}{zF} It = \ddot{A} It$$

### 1. Faraday-Gesetz

Aus (4.40) folgt für die durch gleiche Ladungsmengen abgeschiedenen Massen  $m_1$  und  $m_2$  verschiedener Stoffe:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\left(\frac{M}{Z}\right)_1}{\left(\frac{M}{Z}\right)_2}, It = \text{const}$$

## 2. Faraday-Gesetz

$\frac{M}{Z}$  = Molare Äquivalenzmasse

# 6 DAS MAGNETFELD

Die magnetische Wechselwirkung ist ebenso wie die elektrische Wechselwirkung eine Konsequenz aus der Eigenschaft der Materie elektrische Ladung zu tragen.

Magnetismus wird durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen.

Phänomene der Magnetostatik werden durch stationäre Ströme in geschlossenen Stromkreisen hervorgerufen.

Bewegte elektrische Ladung übt auf zweite bewegte Ladung neben Coulombkraft  $\vec{F}_C$  eine magnetische Kraft  $\vec{F}_m$  aus.

Kräfte zwischen Stromdurchflossenen kurzen Spulen:

$$F_m = a \frac{I_1 I_2}{r^2}$$

## 6.1 MAGNETISCHE KRAFT, MAGNETISCHE FLUSSDICHTE UND MAGNETISCHER FLUSS

Auf bewegte Ladungen wirkt im Magnetfeld eine Kraft:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{B}$  Magnetische Flussdichte mit Einheit  $[\vec{B}] = 1 \frac{N}{Cms^{-1}} = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1 T$ , Tesla

Bewegt sich die Ladung im elektrischen und magnetischen Feld so gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

**(Lorentzkraft, Erfahrungsgesetz)**

Magnetischer Fluss durch Fläche  $A$ :

$$\phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Für geschlossene Fläche gilt:

$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen.

Es gibt also keine magnetischen Ladungen (magnetische Monopole).

## 6.2 ERZEUGUNG VON MAGNETFELDERN DURCH BEWEGTE LADUNGSTRÄGER UND STROMSCHLEIFEN

a) Bewegte Ladungsträger ( $v \ll c$ )

$$\vec{B}(\vec{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{a}}{a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qV \sin \theta}{a^2}$$

$\vec{B}$  steht senkrecht auf  $\vec{V}$  und  $\vec{a}$ .

Feldlinien sind Kreise um die Bewegungsrichtung. (Rechte-Hand-Regel)

Für magnetische Flussdichte gilt das Superpositionsprinzip, weshalb Felder mehrerer bewegter Ladungen sich ungestört überlagern.

b) Stromelement  $I d\vec{l}$

$$dQ = q_e dV', \vec{j} = q_e \vec{v}$$

$$d\vec{B}(\vec{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dQ \vec{v} \times \vec{a}}{a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(q_e dV' \vec{v} \times \vec{a})}{a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

**Differentielles Biot-Savartsches Gesetz**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} d\vec{B}(\vec{r}')$$

Magnetische Flussdichte einer stationären Stromverteilung mit  $\vec{j}dV' = I\vec{dl}$  gilt für „dünn“  
Stromelement:

$$\vec{dB}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Betrag:

$$dB(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl' \sin \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl' \sin \theta}{a^2}$$

c) Stromschleife

Superposition der Anteile  $\vec{dB}$ :

Integration über geschlossene Stromschleife mit Volumen  $V'$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{V'} \vec{dB}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

**Biot-Savartsches Gesetz**

### 6.3 AMPERESCHER VERKETTUNGSSATZ (DURCHFLUTUNGSGESETZ)

Ähnliche dem elektrischen Linienintegral  $\int_K \vec{E}d\vec{s}$  wird nun ein magnetisches Linienintegral  $\int_K \vec{B}d\vec{s}$   
eingeführt.

Es liefert:

a) Bei nicht geschlossenen  $K$  einen von der speziellen Wahl von  $K$  unabhängigen Wert.

b) Bei geschlossenen  $K$  einen von der speziellen Wahl von  $K$  unabhängigen Wert.

$$\oint_K \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I$$

$I$  ist der von  $K$  umschlossene Strom. Wegen Superpositionsprinzip gilt.



$$\oint_K \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

## 6.4 ANWENDUNGSBEISPIELE

a)  $\vec{B}$  im Zentrum einer kreisförmigen Stromschleife mit Radius  $R$  und Strom  $I$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{d\vec{l} \times (-\vec{r}')}{R^3}$$

$$\Rightarrow B(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_L \frac{dlR}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R^2}{R^3} = \mu_0 \frac{I}{2R}$$

$\vec{B}(0)$  weist in Richtung  $d\vec{l} \times (-\vec{r}')$ , das heißt aus Zeichenebene heraus (Rechte-Hand-Regel).

b)  $\vec{B}$  auf der Achse einer kreisförmigen Stromschleife im Abstand  $r_{\parallel}$ , magnetischer Dipol

$$d\vec{B}(r_{\parallel}) \perp d\vec{l}$$

$$d\vec{B}(r_{\parallel}) \perp (\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'), \|\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'\| = \sqrt{R^2 + r_{\parallel}^2}$$

$$|\vec{r}'| = R, |\vec{r}_{\parallel}| = r_{\parallel}$$

Beitrag von  $d\vec{l}$ :

$$dB(r_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl'}{R^2 + r_{\parallel}^2}$$

Aus Symmetriegründen folgt:

$$\vec{B}_{\perp}(r_{\parallel}) = \oint_L d\vec{B}_{\perp} = 0$$

Achsenparalleler Beitrag:

$$dB_{\parallel}(r_{\parallel}) = dB \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r_{\parallel}^2}} dB = \frac{\mu_0}{4\pi} IR \frac{dl'}{(R^2 + r_{\parallel}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_{\parallel}(r_{\parallel}) = \oint_L dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + r_{\parallel}^2)^{\frac{3}{2}}} \oint_L dl' = \mu_0 \frac{IR^2}{2(R^2 + r_{\parallel}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{B}_{\parallel}(\vec{r}_{\parallel})$  weist in Richtung der Flächennormalen der Stromschleife.

Feldlinien des Kreisstroms:

Falls  $R \ll r_{\parallel}$ :

$$(R^2 + r_{\parallel}^2) \approx r_{\parallel}^2, B_{\parallel}(r_{\parallel}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2r_{\parallel}^3}$$

Mit  $A = R^2\pi, p_m = IA$  erhält man:

$$B_{\parallel}(r_{\parallel}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2IA}{r_{\parallel}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{r_{\parallel}^3}$$

Vergleich mit elektrischem Feld eines elektrischen Dipols:

$$E_{\parallel}(r_{\parallel}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r_{\parallel}^3}$$

Identische Feldverteilung von  $E_{\parallel}$  und  $B_{\parallel}$  längs  $r_{\parallel}$ ! Berechnung der Felder für Raumpunkt zeigt: Das durch einen stationären Kreisstrom hervorgerufene  $\vec{B}$ -Feld ist in weiter Entfernung von der Stromschleife identisch in der Form mit dem elektrischen Feld eines elektrischen Dipols.

Kreisförmige Stromschleife wird magnetischer Dipol genannt. Magnetisches Dipolmoment:

$$\vec{p}_m = I\vec{A}$$

Richtung von  $\vec{A}$ : Festgelegt durch Rechtsschraubenrichtung.

### **Bemerkungen:**

Magnetisches Moment einer stationären Stromdichteverteilung  $\vec{j}$  im Volumen  $V$ :

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV'$$

Überprüfung für Stromschleife:

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_{l'} \vec{r}' \times I d\vec{l}' = \frac{1}{2} I \int_{l'} r' dl \vec{e}_A = I\pi r'^2 \vec{e}_A = IA\vec{e}_A$$

Betrag des magnetischen Moments einer beliebig geformten, ebenen Stromschleife  $|\vec{p}_m| = IA$ .

c) Langer, gerader homogener Leiter

$dl' \sin \theta = |\vec{r} - \vec{r}'| d\alpha$  und  $\frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sin \theta = \cos \alpha$  mit (5.8) folgt:

$$dB(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl' \sin \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha d\alpha}{a}$$

$$B(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{I\mu_0}{2\pi a}$$

$B$  hängt nur von Abstand  $a$  ab. Damit folgt: Feldlinien verschließen den Leiter kreisförmig.

d) Magnetfeld einer Spule ( $N$  Windungen auf Gesamtlänge  $l$ )

Spulenwindungen auf Länge  $dz'$ :

$$\frac{N}{l} dz'$$

Mit (5.16) (Einzelschleife) folgt:

$$dB_{\parallel}(z) = \left[ \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + (z' - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{N}{l} dz'$$

$$B_{\parallel}(z) = \frac{\mu_0 IR^2 N}{2l} \int_0^l \left[ \frac{dz'}{(R^2 + (z' - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\mu_0}{2} I \frac{N}{l} \left( \frac{l - z}{\sqrt{R^2 + (l - z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Feld an den Spulenenden ( $z = 0, l$ ):

$$B_{\parallel}(0) = B_{\parallel}(l) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{N}{(R^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}$$

In Spulenmitte ( $z = l/2$ ):

$$B_{\parallel}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{\left(R^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Im Grenzfall  $R \ll l$  (lange Spule) gilt

$$B_{\parallel}(0) = B_{\parallel}(l) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$B_{\parallel}\left(\frac{l}{2}\right) = \mu_0 \frac{NI}{l} = 2B_{\parallel}(0)$$

## 7 BEWEGUNG GELADENER TEILCHEN IM MAGNETFELD

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Superpositionsprinzip

Ladungsträger können Leiter nicht (schwer) verlassen, aufgrund der zu verrichtenden Austrittsarbeit.

Kräfte auf Ladungsträger entsprechen den Kräften auf den Leiter.

Stationäre Stromverteilung:

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B} = \rho_e dV \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

$$\vec{F}_m = \int_V \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV$$

Drehmoment:

$$\vec{M}_m = \int_V \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) dV$$

a) Kraft  $d\vec{F}_m$  auf Stromelement  $I d\vec{l}$ :

$$dQ = \rho_e dV = qN dV$$

Mit  $N$  als Dichte der Teilchen mit Ladung  $q$ , und einheitlicher Geschwindigkeit  $\vec{v}$ .

$$d\vec{F}_m = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV$$

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

b) Spezialfall: homogener gerader Leiter mit konstantem Querschnitt im homogenen Feld  $\vec{B}$  der Länge  $l$

Sei  $\vec{j}$  und  $\vec{B}$  konstant. Mit (6.2) folgt:

$$\vec{F}_m(\vec{j} \times \vec{B}) \int_V d^3r = (\vec{j} \times \vec{B}) V$$

Mit  $V\vec{j} = I\vec{l}$ ,  $I$  Vektor in konventionelle Stromrichtung vom Betrag  $l$ :

$$\vec{F}_m = I\vec{l} \times \vec{B}$$

## c) Kraft auf starre Stromschleife

Integration von (6.4) über geschlossene Schleife:

$$\vec{F}_m = \oint_{\text{ges Schleife}} I d\vec{l}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = \int_{\text{ges } V'} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV$$

Wichtige Gleichung der Elektrotechnik, gibt an, welche Kräfte mit Strömen erzeugt werden (Elektromotor!).

Im homogenen Feld  $\vec{B}(r) = \text{const.}$  wird  $\vec{F}_m = 0!$

## d) Drehmoment auf eine ebene, starre Stromschleife im homogenen Feld

Wegen Homogenität von  $\vec{B}$  ist Summe der am Schwerpunkt angreifenden Kräfte Null; aber: Bildet Flächennormale der Stromschleife mit  $\vec{B}$  einen Winkel  $\theta \neq 0$ :

Drehmoment an Stromschleife!

$$\vec{M}_m = \vec{b} \times \vec{F}_m$$

Drehmoment:

$$M_m = b F_m \sin \theta = b I l B \sin \theta = I A B \sin \theta$$

Vektoriell:

$$\vec{M}_m = I \vec{A} \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$

$\vec{M}_m$  dreht Stromschleife so, dass  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  wird. Richtung von  $\vec{A}$  ist durch Umlaufsinn des Stroms festgelegt (Rechtsschraubenregel).

$N$  Windungen – also vergrößert sich das Drehmoment um Faktor  $N$ .

(6.7) gilt allgemein für beliebig geformte ebene Stromschleife!

## e) Halleffekt

Im Stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld baut sich quer zur Stromausrichtung eine Spannung auf (Hallspannung  $U_H$ ).

Anwendung:

„Hallsonde“ zur Messung von Magnetfeldern. Aus  $U_H$  wird auf  $B$  geschlossen. Im Gleichgewicht gilt:

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_m, \quad e\vec{E}_H = -\vec{v}_D \times \vec{B}$$

Mit  $U_H = E_H b, I = jA, j = \rho v_D, \rho = Nq$  erhält man bei  $q = -e$ :

$$E_H = -v_D B = -\frac{jB}{\rho} = -\frac{jB}{Nq} = -R_H jB$$

Hallspannung:

$$U_H = E_H b = -R_H j B b = -R_H \frac{I b B}{A}$$

Hall-Konstante:

$$R_H = \frac{1}{Nq}$$

Materialcharakteristische Konstante – Vorzeichen von  $R_H$  entspricht dem Vorzeichen der Ladungsträger.

f) Kraft zwischen parallelen, stromdurchflossenen Leiter im Abstand  $a$

Nach (6.5) ist

$$\vec{F}_{m,1} = I_1 \vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$

Nach (5.21) ist

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}, \vec{B}_2 \perp \vec{l}_1$$

$$F_{m,1} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{l_1}{a}$$

Aus Symmetriegründen folgt:

$$\vec{F}_{m,1} = -\vec{F}_{m,2}$$

Kraft pro Längeneinheit, die 2 Leiter aufeinander ausüben, wenn sie gleichsinnig vom Strom  $I$  durchflossen werden:

$$\frac{F_m}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$$

### **Definition des Ampere:**

Zwei parallele Leiter im Abstand 1 Meter: Kraft pro Meter Länge entspricht  $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m} = I = 1$  Ampere.

## 7.1 BEWEGUNG GELADENER TEILCHEN IM MAGNETFELD

a) Bewegung im homogenen Magnetfeld mit  $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}), F_m = qvB = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

Mit  $v = \omega r$  folgt:

$$\omega_{\text{zykl}} = \frac{qB}{m}$$

**Zyklotronfrequenz**

b)  $\vec{v}$  nicht senkrecht zu  $\vec{B}$

Wegen  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  erfährt die Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\parallel}$  keine Kraft (Ablenkung).

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

Ergibt eine spiralförmige Bahn.

Beispiel: Polarlicht!

c) Allgemeiner Fall: Bewegung in magnetischen und elektrischen Feldern

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

**Beispiel: Wienfilter (Geschwindigkeitsfilter)**

Nichtablenkung bedeutet:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0$$

Stehen Geschwindigkeit, elektrisches Feld und Magnetfeld jeweils senkrecht zueinander, gilt:

$$v = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

**Beispiel: Massenspektrometer**

$$qv\vec{B}' = m \frac{v^2}{r}, v = \frac{E}{B} \Rightarrow m = \frac{qBr}{v} = \frac{qBB'r}{E}$$

## 8 INDUKTION, ELEKTRISCHER SCHWINGKREIS

### 8.1 BEWEGTER LEITER IM MAGNETFELD

Stab mit Länge  $l$

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Wird ein metallischer Stab der Länge  $l$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  senkrecht zu seiner Achse und zur Richtung von  $\vec{B}$  bewegt, so entsteht zwischen seinen Enden eine Spannung  $U_{ind}$ . (vgl. Halleffekt)

$$U_{ind} = -v l B$$

Stab gleitet auf leitender Schleife:

$$dx = v dt$$

Messgerät zeigt Strom an, der durch  $U_{ind}$  hervorgerufen wird. Zusammenhang zwischen  $U_{ind}$  und der Änderung des magnetischen Flusses: Änderung des magnetischen Flusses durch geschlossene Leiterschleife:

$$d\phi_m = B dA = B l dx$$

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v$$

Induzierte Spannung:

$$U_{ind} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B l v$$

### 8.2 FARADAYSCHES INDUKTIONSGESETZ

Fundamentaler elektromagnetischer Induktionseffekt: Jeder veränderte magnetische Fluss erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld  $\vec{E}^{(e)}$ .

In Leiterschleife treibt  $\vec{E}^{(e)}$  die Ladungsträger durch die Schleife.

$$U_{ind} = \oint_K \vec{E}^{(e)} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

Aber:

Feld ist nicht an Materie gebunden, es entsteht auch im Vakuum!



Für  $N$  Windungen der Leiterschleife gilt:

$$U_{ind} = -N \frac{d\phi_m}{dt}$$

**Bemerkungen:**

1) Das durch elektrische Ladungen erzeugte elektrische Feld ist konservativ:

$$\oint_K \vec{E} \, d\vec{s} = 0$$

2) Das durch einen veränderten magnetischen Fluss erzeugte elektrische Feld ist nicht konservativ.

⇒ Es kann kein skalares elektrisches Potential zugeordnet werden.

⇒ Feldlinien sind geschlossen.

⇒ Linienintegral der Feldstärke verschwindet für geschlossene Wege nicht.

$$\oint_K \vec{E} \, d\vec{s} = \oint_K \vec{E}^{(e)} \, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left( \int_A \vec{B} \, d\vec{A} \right)$$

**Lenz'sche Regel:**

Die in Folge induzierter Spannungen auftretenden Ströme sind so gerichtet, dass das Magnetfeld des induzierten Stroms die Änderung des ursprünglichen Feldes zu hindern bestrebt ist.

### 8.3 MAXWELL'SCHE GLEICHUNGEN IN INTEGRALFORM

In 5.3 hatten wir den Ampere'schen Verkettungssatz kennen gelernt ((5.10) und (5.11)):

$$\oint_K \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j} \, d\vec{A}$$

Gilt für Stationäre Ströme!

Für allgemein zeitabhängige Ströme gilt:

$$\oint_K \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \int_A \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

Bei Vorhandensein einer elektrischen Ladungsdichte  $\rho_{frei}$  von freien Ladungen und elektrischen Strömen der Ladungsdichte  $\vec{j}$  durch bewegte freie Ladungen gelten im Vakuum in jedem Raumpunkt  $\vec{r}$

zu jeder Zeit  $t$ , bei beliebiger Wahl der Integrationsflächen  $A$  und der sie brandenden Kurven  $K$  die 4 Maxwell'schen Gleichungen:

Induktionsgesetz:

$$\oint_K \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{A(K)} \vec{B} \, d\vec{A}$$

Ampere'scher Verkettungssatz

$$\oint_K \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \int_{A(K)} \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

Gauß'sches Gesetz für elektrischen Fluss  $\phi_e$ :

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(A)} \rho_{frei} \, dV$$

Gauß'sches Gesetz für magnetischen Fluss  $\phi_m$ :

$$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0$$

(Die ersten beiden Gleichungen sind miteinander gekoppelt)

Zusammen mit der Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Beschreiben die Maxwell'schen Gleichungen das elektromagnetische Feld, seine Erzeugung, seine Eigenschaften, seine Wirkungen, das heißt alles was wir über das Elektromagnetische Feld wissen.

Lorentzkraft verknüpft  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit der Mechanik.

Differentielle Form: Zusammenziehen der Integrale – Volumina, Flächen und Wege zu einem Punkt.

*Anwendung auf Experiment:*

Integralform, da alle Messgeräte endliche Abmessungen haben.

## 8.4 SELBSTINDUKTION

Stromänderung in Leitersystem folgt eine Änderung des Magnetfeldes folgt eine induzierte Spannung.  
Es gilt allgemein:

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$$

$L$ : Selbstinduktivität (kurz Induktivität) mit Einheit Henry -  $1 \frac{Vs}{A} = 1H$ .

Minuszeichen ist Ausdruck der Lenzschen Regel.

Beispiel:

Induktivität einer langen Spule mit  $N$  Windungen, Länge  $l$

Nach 5.4 d) ist das Feld in der Spulenmitte:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$\phi_m = BA = \mu_0 \frac{AN}{l} I, U_{ind} = -N \frac{d\phi_m}{dt} = -\mu_0 \frac{AN^2}{l} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Also folgt:

$$L = \mu_0 A l \left( \frac{N}{l} \right)^2$$

## 8.5 ANWENDUNGEN (ZEITVERHALTEN VON STROMKREISEN)

a) Ein- und Ausschaltvorgang in Kreis mit Induktivität  $L$  und Ohm'schen Widerstand  $R$

Verzögerung beim Erreichen der Maximalstromstärke durch Spule.

*Einschaltvorgang:*

Maschenregel:  $\sum_i U_i^{(e)} = \sum_j I_j R_j$

$$U_0 - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$IR + L \frac{dI}{dt} = U_0$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 \left( 1 - e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right)$$

Dabei ist  $I_0 = \frac{U_0}{R}$  ein asymptotischer Wert des Stroms.

*Ausschaltvorgang:*

$$IR + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$I(0) = I_0$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

Dabei definiert man  $\tau = \frac{L}{R}$  als Relaxationszeit oder Zeitkonstante des  $RL$ -Kreises.

*b) Gespeicherte Energie in einer Stromdurchflossenen Spule*

Leistungsbilanz zur Zeit  $t$  beim Einschaltvorgang: (durch (7.9) mal  $I(t)$ ):

$$U_0 I(t) - I(t)L \frac{dI}{dt} = I^2(t)R$$

Wobei  $U_0 I(t)$  die Leistung der Spannungsquelle darstellt,  $I(t)L \frac{dI}{dt}$  die Leistung der Spulen (Elektromotorische Kraft) darstellt und  $I^2(t)R$  die im Widerstand umgesetzte Leistung darstellt.

Arbeit:

$$W_{spEMK} = - \int_0^{I_0} LI \frac{dI}{dt} dt = - \int_0^{I_0} LI dI = -\frac{1}{2} LI_0^2$$

Negativ – da die Spule Energie aufnimmt.

Ausschaltvorgang – also (7.11) mal  $I(t)$ :

$$-I(t)L \frac{dI}{dt} = I^2(t)R$$

Arbeit:

$$W_{spEMK} = - \int_{I_0}^0 LI \frac{dI}{dt} dt = - \int_{I_0}^0 LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2$$

Positiv – die Spule gibt also Energie ab.

Die in einer den Strom  $I$  führenden Spule mit Induktivität  $L$  gespeicherten Energie ist:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Geladener Kondensator: Energie ist im elektrischen Feld

Stromführende Spule: Energie ist im magnetischen Feld

c) *Energiedichte des magnetischen Feldes im Vakuum*

Betrachten lange Spule:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}, B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2 l A}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{B^2 V}{\mu_0}$$

Daraus folgt die Energiedichte:

$$\frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Diese gilt Allgemein, und nicht nur für die lange Spule. Die Energiedichte des elektrischen Feldes (Allgemein) ist so definiert:

$$\frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

## 8.6 DER ELEKTRISCHE SCHWINGKREIS

Kirchhoffsche Regel:

$$-L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator.

Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0' t$$

Mit Dämpfungskonstanten:

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

Sowie der Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Und der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Diskussion der Lösungsfälle:

a)  $\beta = 0$  somit  $R = 0$

Ungedämpfte Schwingung mit Eigenfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

b)  $\beta^2 \gg \omega_0^2$

Aperiodischer Grenzfall beim zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung

c)  $\beta^2 < \omega_0^2$

Gedämpfte Schwingung für die gilt:

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' = \frac{1}{C} \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Betrachten idealisierten Schwingkreis mit  $R = 0$ :

Periodischer Austausch zwischen elektrischer Energie des Kondensators und magnetischer Energie der Spule.

## 8.7 ERZWUNGENE ELEKTRISCHE SCHWINGUNG

Wechselspannung –  $U_0 \cos \omega t$  an Schwingkreis:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{LC} I = \sin \omega t \frac{U_0 \omega}{L}$$

Differentialgleichung für erzwungene Schwingung – Lösung:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Mit:

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Durch

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}, I_0 = \frac{U_0 \frac{\omega}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Ist die Resonanzkurve gegeben.

Zwischen Strom und Spannung besteht eine Phasenverschiebung  $\varphi$ .

Für  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  wird (7.29) zu:

$$I_0^{max} = \frac{U_0 \omega_0 \tau}{L \omega_0} = \frac{U_0}{R}$$

## 8.8 KOMPLEXE DARSTELLUNG VON WECHSELSTRÖMEN UND SPANNUNGEN

$$U_{\sim} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U), [U_0] = V$$

$$I_{\sim} = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I), [I_0] = A$$

Mit Momentanwerten  $U_{\sim}, I_{\sim}$  und Scheitelwerten  $U_0, I_0$ .

$\varphi$ : Phasenwinkel,  $\omega$ : Kreisfrequenz in  $[\omega] = \frac{1}{s}$  und  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ , sowie Frequenz  $\nu$  mit  $[\nu] = \frac{1}{s} = Hz$ .

$T$ : Periodendauer

*Mathematische Identität:*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$I_{\sim} = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I)$$

Imaginärteil von  $J = I_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi_I} = J_0 e^{i\omega t}$  mit  $J_0 = I_0 e^{i\varphi_I}$ .

Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  kann in einem Wechselstromkreis mit  $R, L, C$  stets abgespalten werden, so lange der Kreis nur Spannungsquellen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  enthält.

*Komplexe Zahl:*

$$J_0 = I_0 e^{i\varphi_I} = x + iy$$

(Komplexer Scheitelwert)

Kann in Gauß'scher Zahlenebene dargestellt werden. (Zeigerdarstellung)

Summe zweier Ströme (Spannungen) ist gleich der Summe ihrer komplexen Darstellungen.

Beispiele:

### 1. Wechselspannungen

$$U_{\sim} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U)$$

Wird durch Komplexe Zahl dargestellt.

$$\mathfrak{U}_0 = U_0 e^{i\varphi_U}$$

$$U_{\sim} = \Im\{\mathfrak{U}\} = \Im\{\mathfrak{U}_0 e^{i\omega t}\} = \Im\{U_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi_U}\} = U_0 \sin(\omega t + \varphi_U)$$

### 2. Anwendung der Knotenregel auf quasistationäre Wechselströme

Die Kirchhoffschen Gesetze gelten für die Momentanwerte der Ströme (Spannungen).

a) reelle Betrachtung

$$I_{\sim 1} = I_{01} \sin(\omega t + \varphi_{I1})$$

$$I_{\sim 2} = I_{02} \sin(\omega t + \varphi_{I2})$$

Es gilt  $I_{\sim} = I_{\sim 1} + I_{\sim 2}$  mit  $I_{\sim} = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I)$ ,  $I_0$  und  $\varphi_I$  sind zu bestimmen.

Mit Hilfe von Additionstheoremen ergibt sich als Scheitelwert:

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\varphi_{I2} - \varphi_{I1})}$$

Und für den Phasenwinkel:

$$\tan \varphi = \frac{I_{01} \sin \varphi_{I1} + I_{02} \sin \varphi_{I2}}{I_{01} \cos \varphi_{I1} + I_{02} \cos \varphi_{I2}}$$

b) Komplexe Betrachtung (einfacher)

$$J_{01} = I_{01} e^{i\varphi_{I1}}, J_{02} = I_{02} e^{i\varphi_{I2}}$$

Knotenregel:  $J_0 = J_{01} + J_{02}$

Addition der Zeiger liefert:

$$\tan \varphi = \frac{I_{01} \sin \varphi_{I1} + I_{02} \sin \varphi_{I2}}{I_{01} \cos \varphi_{I1} + I_{02} \cos \varphi_{I2}}$$

$$I_0^2 = (I_{01} \cos \varphi_{I1} + I_{02} \cos \varphi_{I2})^2 + (I_{01} \sin \varphi_{I1} + I_{02} \sin \varphi_{I2})^2 = I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\varphi_{I2} - \varphi_{I1})$$

Impedanz von Wechselstromkreisen

$$\zeta = \frac{\mathfrak{U}_0}{J_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\varphi_U - \varphi_I)} = Z e^{i\psi}, \psi = \varphi_U - \varphi_I \text{ (Sogenannte Impedanz)}$$



$$Z = \frac{U_0}{I_0} \text{ (reeller Wechselstromwiderstand) } = |\zeta|$$

$$U_0 = \zeta - J_0$$

Analog zum Ohm'schen Gesetz:

$$U = \zeta J$$

## 8.9 IMPEDANZ EINFACHER WECHSELSTROMKREISE

a) Kreis mit Ohm'schen Widerstand  $R$

Wegen  $U_{\sim} = RI_{\sim}$  zu jedem Zeitpunkt gilt:

$$U = RJ$$

Daraus folgt die Impedanz des Ohmeschen Widerstandes:

$$\frac{U}{J} = \frac{U_0}{J_0} = \zeta_R = R$$

Da  $\zeta_R = Z_R e^{i\psi_R}$  reell ist, folgt  $\psi_R = \varphi_U - \varphi_I = 0$

Spannung und Strom sind in Phase. Wechselstromwiderstand ist gleich dem Ohm'schen Widerstand.

b) Kreis mit Kapazität  $C$

$$U = U_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi_U}$$

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U_0 e^{i\omega t} e^{i\varphi_U} = U$$

Wegen  $Q = CU_{\sim}$  zu jedem Zeitpunkt wird

$$J = C \frac{dU}{dt} = i\omega C U, \zeta_C = \frac{U_0}{J_0} = \frac{U}{J} = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C} = Z_C e^{i\psi_C}$$

**(Impedanz der Kapazität  $C$ )**

Mit  $Z_C = \frac{1}{\omega C}$ : Kapazitiver Widerstand

$$\psi_C = -\frac{\pi}{2} = \varphi_U - \varphi_I, \varphi_I = \varphi_U + \frac{\pi}{2}$$

$$J = \frac{U}{\zeta_C} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{\frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$\Im\{J\} = I_{\sim} = \omega C U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Strom in der Kapazität eilt der Spannung um  $\frac{\pi}{2}$  voraus.

c) Kreis mit Induktivität

Schleifenregel:

$$U_{\sim} - L \frac{dI_{\sim}}{dt} = 0$$

Wegen  $U_{\sim} = L \frac{dI_{\sim}}{dt}$  zu jedem Zeitpunkt wird

$$\mathfrak{U} = L \frac{dJ}{dt} = i\omega L J$$

$$\zeta_L = \frac{\mathfrak{U}}{J} = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$

**(Impedanz der Induktivität)**

$Z_L = \omega L$  induktiver Widerstand

$$\psi_L = \frac{\pi}{2} = \varphi_U - \varphi_I, \varphi_I = \varphi_U - \frac{\pi}{2}$$

$$J = \frac{\mathfrak{U}}{\zeta_L} = \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\Im\{J\} = I_{\sim} = \frac{U_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Spannung der Induktivität eilt dem Strom um  $\frac{\pi}{2}$  voraus.

Das besondere am elektrischen Schwingkreis ist, dass die Resonanz bei  $\omega_0$  ist.

### **Analogie zwischen mechanischer Schwingung und elektrischer Schwingung**

Auslenkung $x$	-	elektrische Ladung $Q$
Masse $m$	-	Induktivität $L$
Federkonstante $D$	-	reziproke Kapazität $\frac{1}{C}$
Reibungszahl $\mu$	-	Ohmscher Widerstand $R$
Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$	-	Stromstärke $I = \frac{dQ}{dt}$

Die erzwungene mechanische Schwingung liefert uns folgende Differentialgleichung für  $x(t)$ :

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + Dx = F_0 \sin \omega t$$

Resonanz:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{m} \right)^2, \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Die erzwungene elektrische Schwingung liefert uns folgende Differentialgleichung für  $Q(t)$ :

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t$$

Aber: beim elektrischen Schwingkreis interessiert der Strom  $I$ :

$$\frac{d}{dt} : L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega U_0 \cos \omega t$$

$\Rightarrow \omega_r = \omega_0$  unabhängig von der Dämpfung!

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

d) *Serienkreis mit  $R, L, C$*

$$U_{\sim} = U_0 \sin \omega t$$

Wegen  $U_{\sim} = L \frac{dI_{\sim}}{dt} + RI_{\sim} + \frac{Q_{\sim}}{C}$  zu jedem Zeitpunkt wird  $\frac{dU}{dt} = L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C}$ :

$$i\omega U = \left( Li^2 \omega^2 + i\omega R + \frac{1}{C} \right) J$$

$$\zeta = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = \zeta_R + \zeta_L + \zeta_C$$

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = |\zeta| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

**(reeller Wechselstromwiderstand)**

$$\frac{\Im\{J\}}{\Re\{J\}} = \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I_{\sim} = \Im\{J\} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U_L = Z_L I = \omega_0 L \frac{U_0}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \frac{U_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R}$$

$$U_C = Z_C I = \frac{1}{\omega_0 C} I_0 = \frac{\sqrt{LC} U_0}{C R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{U_0}{R}$$

$U_L, U_C$  können größer sein als  $U_0, U_{\sim}$  - und sind um  $180^\circ$  Phasenverschoben.

### **Addition von komplexen Widerständen:**

Reihenschaltung:

$$\zeta = \sum_i \zeta_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{\zeta} = \sum_i \frac{1}{\zeta_i}$$

$\frac{1}{\zeta}$  heißt komplexer Scheinleitwert oder Admittanz.

## 8.10 LEISTUNG UND ENERGIE IM WECHSELSTROMKREIS

### a) Kreis nur mit Ohm'schen Widerstand

$$U_{\sim} = U_0 \sin \omega t$$

$$P_{\sim} = U_{\sim} I_{\sim} = U_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

### **Momentanleistung**

Für die in der Periodendauer  $T$  verrichtete Stromarbeit gilt:

$$W_r = \int_0^T P_{\sim} dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 T$$

Einführung von

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_{\sim}^2 dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_{\sim}^2 dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{P}_{\sim} = U_{eff} I_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{R} = I_{eff}^2 R = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

b) Leistung im Kreis mit  $\varphi \neq 0$  zwischen Strom und Spannung

$$P_{\sim} = U_0 \sin \omega t I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{P}_{\sim} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\sim} dt = U_0 \sin \omega t I_0 \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = I_{eff} U_{eff} \cos \varphi$$

$$\bar{P}_{\sim} = P_{\omega} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi$$

**Wirkleistung**

$$P_s = U_{eff} I_{eff}$$

**Scheinleistung**

$$P_{\omega} = I_{eff}^2 Z \cos \varphi = I_{eff}^2 R, \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

$Z$  ist reeller Wechselstromwiderstand.

## 9 MATERIE IM MAGNETFELD

Magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  wird durch Füllung der Spule (z.B. lang gestreckte Spule) mit Materie gegenüber der Flussdichte im Vakuum entweder vergrößert oder verkleinert.

Beispiel: Feld in lang gestreckter Spule:

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

Magnetische Flussdichte wird so beschrieben, als ob sie durch zwei Quellen erzeugt wird:

- 1.) Durch den stationären Strom  $I$
- 2.) Durch die Magnetisierung der Materie

Klassifizierung der Materie:

$$\frac{B}{B_0} < 1 \text{ Diamagnetische Stoffe}$$

$$\frac{B}{B_0} > 1 \text{ Paramagnetische Stoffe}$$

$$\frac{B}{B_0} \gg 1 \text{ Ferromagnetische Stoffe}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Magnetisierung:

Magnetisches Dipolmoment pro Volumeneinheit.

Die magnetischen Dipole resultieren aus:

a) *Permanente Dipole (Para- und Ferromagnetische Substanzen)*

- „effektive“ Bewegung der Elektronen auf atomaren Bahnen (magnetisches Bahnmoment, Atome/Ionen mit nicht abgeschlossenen Schalen)
- Elektronenspin (inhärentes Magnetisches Moment des Elektrons, nur für nicht abgeschlossene Schalen)
- Kernspin (magnetisches Moment der Kerne)

b) *Induzierte Dipole (Diamagnetismus)*

- Induktionswirkung auf Bahnbewegung der Elektronen (Langevinscher Diamagnetismus)

Zu a.)

Gesucht ist das Dipolmoment pro Volumeneinheit  $\vec{M}$

$$\sum_j \vec{p}_{m,j} = \vec{M}V$$

Kreisströme im Inneren kompensieren sich gegenseitig.

Es bleibt ein Oberflächenstrom  $i_M$  (Magnetisierungsstrom)

$$i_M = MV = p_m$$

$$\frac{i_M A}{V} = M = \frac{i_M}{d}$$

Magnetisierungsstrom pro Längeneinheit mit Vorzeichen  $[M] = \frac{A}{m}$ .

Gesuchter Magnetisierungsstrom:

$$I_M = \frac{i_M}{d} L = ML$$

Verursacht magnetische Flussdichte (betrachtet wie lange Spule)

$$B_M = \frac{\mu_0 I_M}{L} = \frac{\mu_0 ML}{L} = \mu_0 M$$

Das heißt Magnetisierung  $\vec{M}$  entspricht magnetischem Dipolmoment pro Volumeneinheit.

Magnetische Feldintensität  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Die Feldstärke  $\vec{H}$  ist also unabhängig davon, ob Materie sich im Feld befindet.

Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität

In vielen Medien ist  $\vec{M}$  proportional zu  $\vec{H}$ .

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$\chi_m$ : Magnetische Suszeptibilität (Materialkonstante)

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$$

**Relative Permeabilität**

Diamagnetische Stoffe	$\mu < \mu_0$	$\chi_m < 0$	$\vec{M} \downarrow \vec{H}$
Paramagnetische Stoffe	$\mu > \mu_0$	$\chi_m > 0$	$\vec{M} \uparrow \vec{H}$
Ferromagnetische Stoffe	$\mu \gg \mu_0$	$\chi_m \gg 0$	$\vec{M} \uparrow \vec{H}$

## 9.1 DIAMAGNETISCHE SUBSTANZEN

$$\chi_m^{Dia} < 0, \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu\vec{M} = \vec{B}_0 + \mu_0\chi_m^{Dia}\vec{H}$$

$$|\vec{B}| < |\vec{B}_0|$$

Diamagnet „verdrängt“ Magnetfeld aus seinem Inneren.

*Supraleiter*: Idealer Diamagnet, das heißt  $\chi_m = -1$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = 0$$

Meissner-Effekt (z.B. Blei):

$T = 300K$ : Magnetfeld geht durch

$T < 7,19K$ : Magnetfeld wandert an Bleikugel vorbei

## 9.2 FERROMAGNETISMUS

$\vec{M}$  ist nicht proportional zu  $\vec{H}$ , da magnetische Suszeptibilität  $\chi_m$  selbst von  $\vec{H}$  abhängt und von Vorbehandlung des Materials. In Ferromagnetischer Phase bildet sich auf Grund der Austauschwechselwirkung (Quantenmechanischer Effekt) zwischen den mikroskopischen magnetischen Momenten Domänen (Bereiche homogener Magnetisierung).

Äußeres Feld  $\vec{H}$  verursacht nach und nach Ausrichtung der  $\vec{M}_i \parallel \vec{H}$  (Sättigung).

Verteilung  $\vec{M}_i$  bei  $\vec{H} = 0$  hängt von Vorgeschichte ab.

*(Remanenz, Koerzitivkraft)*

Ferromagnetische Stoffe zeigen ihr typisches Verhalten nur unterhalb der Curie-Temperatur!

## 9.3 TEMPERATURABHÄNGIGKEIT VON $\chi_m$

Paramagnetische Stoffe:

$$\chi_m = \frac{c}{T}$$

Ferromagnetische Stoffe:

$$\chi_m \sim \frac{1}{T - T_c}, T > T_c$$

**Curie-Weiß-Gesetz**