Theoretische Physik I - Mechanik

Prof. Dr. Klaus Richter

Florian Rappl

11. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorbemerkungen

Wesen und Aufgabe der Theoretischen Physik

- Ausgangspunkt: Existenz einer realen Außenwelt, in der Vorgänge regelmäßig ablaufen $\rightarrow$ Naturgesetze
- Erfahrung über Sinnesorgane, nicht unmittelbar
- Zuständen und Vorgängen in Außenwelt wird gedankliches Modell (physikalsiche Theorie) zugeordnet
- Verknüpfung mit realer Welt durch Messprozesse

$\Rightarrow$ Physikalische Theorie notwendigerwaeise mathematisches Modell (keine nicht quantitive Physik)

- Vorhersagen der Theorie werden druch Exprerimente überprüft
- Maßgebliches Kriterium für Beurteilung einer physikalischen Theorie: Übereineinstimmung mit Erfahrung. Nicht: Einfachheit, Anschaulichkeit

Grundgedanke der klassischen Mechanik

- Mechanik untersucht Gesetzmäßigkeiten, nach denen die Bewegung materieller Körper verläuft
- Bewegung: Änderung des Ortes als Funktion der Zeit unter Einfluss von Kräften

Entwicklung der klassischen Mechanik

Aristoteles (384-322 v.Chr.)

- natürliche Bewegung irdischer Körper nur vertikel, zeitliche Bewegung nur durch äußere Einwirkung
- nicht quantitativ

Galilei (1564-1642)

- empirische Vorgehensweise (Fallversuche)
- Kein Unterschied zwischen irdischer und himmlischer Materie
- Verbindung von Experiment und gedanklicher Extrapolation

Newton (1642-1727)

- Empirisches Prinzip der Naturerkenntnis in voller Ausprägung

Lagrange (1736-1813)

- Berücksichtigung von Zwangsbedingungen
- Lagrange-Gleichungen (Energie steht im Vordergrund)

Hamilton (1805-1865)

- Hamilton-Gleichungen
- „Phasenraum"
- wichtig für Quantenmechanik

Nichtlineare Dynamik /Chaostheorie, klassische Vielteilchentheorie

- kritische Phänomene
- Selbstorganisation
- Komplexe Systeme → Klimaerforschung

Kapitel 2

Elementare Newton'sche Mechanik

2.1 Die Newton'schen Axiome

2.1.1 Grundbegriffe

Kinematik Bewegungslehre, Rolle von Raum und Zeit

Dynamik Veränderung des Systemzustands aufgrund von Wechselwirkung

Massenpunkt (Punktmasse) Idealisierung (Grenzfall) eines räumlich beschränkten Systems mit Abmessungen, die klein gegenüber Abständen zu anderen Teilsystemen sind.

Beispiele Mond-Erde-Sonne, Moleküle eines Gases

Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}(\triangle t + t) - \vec{r}(t)}{\triangle t}$

Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

Innere und äußere Kräfte Fasst man eine Anzahl von Körpern zu einem System zusammen, so heißen die Kräfte zwischen den Körpern innere Kräfte, die von außen einwirkenden Kräfte äußere Kräfte.
Kraft auf Körper (index i) am Ort $\vec{r_i}$:

$$\vec{F_i}(\vec{r_i}) = \sum_j \vec{F_{ij}}(\vec{r_i}, \vec{r_j}) + \vec{F_i}^{ext}(\vec{r_i}) \tag{2.1}$$

$\vec{F}_i^{ext}$: äußere Kraft.

Definition

- Offenes System: $\vec{F}_i^{ext} \neq 0$
- Geschlossenes System: $\vec{F}_i^{ext} = 0$

2.1.2 Die Newton'schen Axiome der Dynamik

Newton: „Philosophiae naturalis principia mathematica" (Cambridge, 1687)
→ Theoretische Mechanik nach Vorbild der Geometrie von Euklid.
Definitionen ⟶ Satz von Axiomen ⟶ Mathematische Ableitung physikalischer Gesetze ⟶ Vergleichen mit Erfahrung

Lex I (Trägheitsgesetz)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen Bewegung solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

$$\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = const. \tag{2.2}$$

Lex II (Kraftwirkungsgesetz)

Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der jenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{2.3}$$

Lex III (Reaktionsprinzip), „actio=reactio"

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich.

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \tag{2.4}$$

Lex IV (Superpositionsprinzip), Newton: Corollarium I

Kräfte addieren sich wie Vektoren.

$$\vec{F}_i = \sum_{j,j\neq i} \vec{F}_{ij} \tag{2.5}$$

Bemerkungen

1. Bewegungen bei Newton bezogen auf „absoluten Raum" und „absolute Zeit", gegeben durch das Ruhesystem der entfernten Fixsterne. Zeit ist unabhängig vom Raum.

2. Vorstellung konstanter Längen und Zeitmaßstäbe ist nicht vereinbar mit spezieller Relativitätstheorie:
   Abhängigkeit vom Bezugssystem.

3. In Lex III wird alternativ Masse oder Kraft definiert. Bei vorgegebener Kraft wird durch $\vec{p} = m_t\vec{v}$ die träge Masse m_t definiert.
   Durch Gewichtskraft $\vec{F}_s = m_s\vec{g}$ wird die schwere Masse m_s definiert.
   Gleichsetzen: $m_t\dot{\vec{v}} = m_s\vec{g} \Rightarrow \dot{\vec{v}} = \frac{m_s}{m_t}\vec{g}$.
   $\rightarrow$ Einstein'sches Äquivalenzprinzip:
   $$m_s = m_t \tag{2.6}$$
   Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

4. Lex II:
   $$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} + \dot{m}\vec{v} \tag{2.7}$$

5. Kraftbegriff durch Lex II und Lex III implizit als 2-Teilchen-Wechselwirkung definiert.
   $\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \frac{d}{dt}\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)$
   Zusatzannahme: $\vec{F}_{ij}$ wirkt entlang der Verbindungslinie.
   $$\vec{F}_{ij} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \tag{2.8}$$

6. $\vec{F}$ ist instantane Wechselwirkung (Fernwirkungstheorie).

7. Lex I gilt für Inertialsysteme und legt diese fest. In beschleungten Systemen: Zusätzliche Kräfte - Scheintkräfte.
   Geeignete Inertialsysteme: Näherungsweise für viele Probleme die Erde; Für Corioliskräfte: Fixsterne.

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, \frac{d}{dt}\vec{r}_i - \vec{r}_j, t) \tag{2.9}$$

sind invariant unter Galilei-Transformation:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \tag{2.10}$$

$\Rightarrow m_i\ddot{\vec{r}}_i{}' = \sum_j \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}', \frac{d}{dt}\vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}', t)$

Forminvarianz Gesetze haben gleiche Form in verschiedenen Inertialsystemen.

2.2 Dynamik von Systemen von Massenpunkten

Betrachten Systeme von Wechselwirkenden Massenpunkten.

Definitionen

Für ein einzelnes Teilchen (Masse m_i, Ort r_i) gilt:
Impuls:

$$\vec{P_i} = m_i \vec{v_i} \tag{2.11}$$

Drehimpuls (bzgl. Ursprung bei $\vec{r_i} = 0$):

$$\vec{l_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i} \tag{2.12}$$

Kinetische Energie:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r_i}} \tag{2.13}$$

Für N Teilchen gelten:
Gesamtmasse:

$$M := \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{2.14}$$

Schwerpunkt:

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r_i} \tag{2.15}$$

Gesamtimpuls:

$$\vec{P} := \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} = M \dot{\vec{R}} \tag{2.16}$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} := \sum_i \vec{l_i} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{p_i} \tag{2.17}$$

Gesamtenergie:

$$E \text{ (siehe 2.4)}$$

äußere Gesamtkraft:

$$\vec{F}^{ext} := \sum_i \vec{F_i}^{ext} \tag{2.18}$$

äußeres Gesamtdrehmoment:

$$\vec{N}^{ext} := \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}^{ext}(\vec{i}) \tag{2.19}$$

Arbeit der äußeren Felder:

$$W^{ext} := \sum_i \int \vec{F}_i^{ext}(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \tag{2.20}$$

Leistung der äußeren Felder:

$$P^{ext} := \frac{d}{dt} W^{ext} \tag{2.21}$$

Bemerkungen

1. Vektoren, welche bei Raumspiegelung in ihr Negatives übergehen heißen polar.

   Beispiele $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \vec{p}, \vec{F}$

2. Vektoren, welche invariant unter Rauminversion sind, heißen axial oder Pseudovektoren.

   Beispiele $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ und alle Kreuzprodukte zwischen polaren Vektoren

2.2.1 Bewegungsgleichungen

- Kraftwirkungsgesetz von Newton:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F_i} j + \vec{F}_i^{ext} \tag{2.22}$$

$$\vec{F_i} j = -\vec{F_j} i \tag{2.23}$$

- Bewegungsgleichungen für Gesamtsystem:

  1. Impulssatz:
  $$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \tag{2.24}$$
  2. Drehimpulssatz:
  $$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{ext} \tag{2.25}$$
  3. Energiesatz:
  $$E = P^{ext} \text{siehe } 2.4 \tag{2.26}$$

Beweis

1. $\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{P}}_i \overset{=}{\text{Lex II}} \sum_i \sum_j (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext}) \overset{=}{\text{Lex III}} \vec{F}^{ext}$
2. $\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \sum_i \dot{\vec{r_i}} \times \vec{p_i} + \sum_i \vec{r_i} \times \dot{\vec{p_i}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} \times \dot{\vec{r_i}} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0 + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}^{ext} + \sum_{i,j} \vec{r_i} \times \vec{F_{ij}}$
   Nebenrechnung:
   $\sum_{i,j} \vec{r_i} \times \vec{F_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{r_i} \times \vec{F_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{j,i} \vec{r_j} \times \vec{F_{ji}} = 0$, da $(\vec{r_i} - \vec{r_j}) \parallel \vec{F_{ij}}$ ist.
   $\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}^{ext} = \vec{N}^{ext}$

Bemerkungen

1. Es tragen nur die äußeren Kräfte bei.
2. $\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}}$ wirkt auf Schwerpunkt. $\rightsquigarrow$ Idealisierung von Körpern durch Massepunkte.

2.2.2 Erhaltungsgrößen

Definition Sei $\vec{A}$ eine beliebige FUnktion von $\vec{r}$ und $\vec{p}$. $\vec{A}$ heißt Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung, Bewegungsintegral), falls $\dot{\vec{A}} = 0$, das heißt $\vec{A} = const.$. Aus 2.2.1 (1, 2) folgt, dass in einem abgeschlossenen System ($\vec{F}^{ext} \equiv 0$) $\vec{P}$ und $\vec{L}$ Erhaltungsgrößen sind.

1. Impulserhaltungssatz:
$$\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{P}} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = const. \tag{2.27}$$
2. Drehimpulserhaltungssatz:
$$\vec{N}^{ext} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = const. \tag{2.28}$$
$\vec{N}^{ext} = 0$ falls $\vec{F}^{ext}$ Zentralkraft, denn aus $\vec{F}(\vec{r}) = |\vec{F}(\vec{r})| \vec{e_r} \Rightarrow \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{F}{r} \vec{r} = 0$

2.3 Eindimensionale Bewegung

- Allgemeine Form der Bewegungsgleichung
$$m\ddot{x}(t) = F(x, \dot{x}, t) \tag{2.29}$$
gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

- Die Allgemeine Lösung der Differentialgleichung enthält zwei freie Integrationskonstanten, die bestimmt werden durch die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$ oder die Randbedingungen $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$.
- Es existiert kein allgemeines Lösungsverfahren.

2.3.1 Sonderfälle

1. $m\ddot{x} = F_0$ (Beispiel: Schwerefeld $F_0 = -mg$)
   $\Rightarrow m\int_{t_0}^{t} \ddot{x}(t')dt' = \int_{t_0} tF_0dt'$
   $\Rightarrow m\dot{x} - mv_0 = F_0(t - t_0)$
   $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}(t - t_0)^2$

2. $m\ddot{x} = F(t)$ (Beispiel: geladenes Teilchenwechselfeld)
   $\Rightarrow m\dot{x} - mv_0 = \int_{t_0} tF(t')dt'$
   $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0} t'F(t'')dt''dt'$

3. $m\ddot{x} = F(\dot{x})$ (Beispiel: Reibungskräfte) mit $v = \dot{x}$
   $\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = F(v)$
   Trennung der Variablen (Seperation):
   $\Rightarrow m\frac{dv}{F(v)} = dt$
   $\Rightarrow m\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$
   $\Rightarrow v = f(v_0, t - t_0)$
   $\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(v_0, t' - t_0)dt'$

4. $m\ddot{x} = F(x)$ (Beispiel: Harmonischer Oszillator) $F = -\alpha x$
   $\Leftrightarrow m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}$
   $\Leftrightarrow \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{x}^2 = F(x)\frac{dx}{dt}$
   $\Leftrightarrow \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = \int_{t_0}^{t} F(x)\frac{dx}{dt'}dt' = \int_{x_0}^{x} F(x')dx' = -[V(x) - V(x_0)]$

Bemerkungen

- Im eindimensionalen Fall läßt sich Kraft $F(x)$ als Gradiant einer potentiellen Energie schreiben.
$$F = -\frac{dV}{dx} \tag{2.30}$$
- $F(x)$ heißt daher konservativ.

2.3.2 Bewegung im konservativen Kraftfeld

$$m\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{2.31}$$

1. Integration $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{m}{2}v_0^2 + V(x_0) = E = const.$
Gesamtenergie E ist Erhaltungsgröße.

2. Integration Trennung der Variablen

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

$\Rightarrow \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V(x)]}} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$
$\Rightarrow f(x, x_0, E, m) = t - t_0$
$\Rightarrow x(t)$ durch Bilden der Umkehrfunktion
Übersicht über die Lösungen (qualitativ):

Bemerkungen

1. erlaubte Bereiche sind die, in denen $T_{kin} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - V(x) \geq 0$ gilt.
2. Punkte x_i mit $V(x_i) = E$ heißen Umkehrpunkte.
3. Bewegungstypen:
   - $x_1 < x < x_2$: Oszillation mit Schwingungsdauer: $T_{Zeit} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$
   - $x \leq x_0 \vee x \geq x_4$: freie Bewegung
   - $x \to x_3$ für $E = E'$: Limitationsbewegung

2.4 Konservative Kräfte und Energieerhaltungssatz

2.4.1 Raumkurven

Bahn eines Massepunktes, z.B. $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

Differentiation

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \tag{2.32}$$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ ist Tangentialvektor an Kurve bei $\vec{r}(t)$.

Beispiel: Kreisbewegung
$\vec{r}(t) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t)) \Rightarrow \vec{r}(t) = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r}(t))^2 = 2\vec{r}\cdot\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \dot{\vec{r}}$, falls Betrag eines Vektors konstant.

Bogenlänge
Neben Zeit t besonders geeignet für Parametrisierung von $\vec{r}$; natürliche Parametrisierung.

1. **Definition 1** *Tangenteneinheitsvektor*

$$\hat{\vec{E}} := \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \tag{2.33}$$

   $\Rightarrow |\hat{\vec{E}}| = \frac{|d\vec{r}(s)|}{|ds|} = 1.$
   Bestimmung von s für Kurve $\vec{r}(t)$:
   $1 = |\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}| \cdot |\frac{dt}{ds}| \Rightarrow |\frac{ds}{dt}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}|$
   $\Rightarrow s = \int_0^s ds' = \int_{t_0}^t \frac{d_s'}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t |\frac{d\vec{r}(t')}{dt'}| dt' = \int_{t_0}^t |\vec{v}(t')| dt'.$

   Definition 2 *Krümmung*

$$\kappa := |\frac{d\hat{\vec{t}}}{ds}| \tag{2.34}$$

   Stärke der Änderung von $\hat{\vec{t}}$ mit s:
   $\kappa = |\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\frac{d^2 x_i}{ds^2})^2}$
   Krümmungsradius: $\varrho := \frac{1}{\kappa}$

2. **Definition 3** *Hauptnormalvektor*

$$\hat{\vec{n}} := \frac{\frac{d\hat{\vec{t}}}{ds}}{|\frac{d\hat{\vec{t}}}{ds}|} = \varrho \frac{d\hat{\vec{t}}}{ds} \tag{2.35}$$

3. **Definition 4** *Binormalenvektor*

$$\hat{\vec{b}} := \hat{\vec{t}} \times \hat{\vec{n}} \tag{2.36}$$

Beschleunigung eines Massepunktes

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= v\hat{\vec{t}} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{\vec{t}} + \frac{v^2}{\varrho}\hat{\vec{n}} \end{aligned}$$

Aufteilung der Beschleunigung in Tangential- und Zentripetalbeschleunigung. $(F = \frac{mv^2}{\varrho})$

2.4.2 Wegintegrale

Teilchen unter dem Einfluss einer *zeitunabhängigen* Kraft $\vec{F}(\vec{r})$.

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2 = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$
Integration über t von t_1 bis t_2:

- linke Seite: $\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2 dt = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \,|_{t_1}^{t_2} = T(t_2) - T(t_1)$ mit $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$
- rechte Seite: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t))\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = W_{1,2}(C, \vec{F})$
  ist das Wegintegral entlang Bahn C zwischen $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$.

Bemerkung $W_{1,2}$ ist nur abhängig von Weg und Kraft - nicht aber von zeitlichen Durchläufen der Bahnkurve $\vec{r}(t)$.

2.4.3 Konservative Kraftfelder

Definition 5 *Ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ (hier die Kraft) heißt konservativ, wenn das Integral des Weges*

$$\int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \tag{2.37}$$

unabhängig von C ist, das heißt nur von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ abhängig ist.

Es gilt:

1. $\vec{F}$ ist konservativ $\Leftrightarrow$ das Wegintegral $\oint \vec{F}d\vec{r} = 0$ über alle geschlossenen Wege ist.

   Beweis „$\Rightarrow$”: Seien C_1 und C_2 beliebige Wege.

   $$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1,C_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1,C_2}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_2,-C_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}d\vec{r}$$
   $$\Rightarrow 0 = \int_{C_1,-C_2} \vec{F}d\vec{r} = \oint \vec{F}d\vec{r}$$

   „$\Leftarrow$”: Umkehrung entsprechend.

2. $\vec{F}$ ist konservativ, genau dann wenn ein skalares Feld $V(\vec{r})$ existiert, mit

   $$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -grad(V(\vec{r})) \tag{2.38}$$

Der Gradient ist definiert durch:

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \hat{\vec{e}}_i$$

Minus Zeichen in (2.38) ist Konvention.
V ist bis auf Konstante festgelegt.

Beweis „$\Leftarrow$": Sei $C = \{\vec{r}(\sigma') | 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}, \vec{r}(0) = \vec{r}_1, \vec{r}(\sigma) = \vec{r}_2$.

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -\int_0^\sigma \vec{\nabla}V(r(\sigma'))\frac{d\vec{r}}{d\sigma'}d\sigma' = -\int_0^\sigma \frac{d}{d\sigma'}V(\vec{r}(\sigma'))d\sigma' = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)] \tag{2.39}$$

Also unabhängig von C.
„$\Rightarrow$": $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$ sei unabhängig vom Weg.

Definition

$$V(\vec{r}) := -\int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \forall C \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = V(\vec{r}(\sigma)) = -\int_0^\sigma F(\vec{r}(\sigma'))\frac{d\vec{r}(\sigma')}{d\sigma'}d\sigma' \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{d\sigma}V(\vec{r}(\sigma)) = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \cdot \vec{\nabla} = -\vec{F}(\vec{r}(\sigma))\frac{d\vec{r}(\sigma)}{d\sigma} \\
&\Rightarrow \quad (\vec{F} + \vec{\nabla}V)\frac{d\vec{r}(\sigma)}{d\sigma} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \vec{F} + \vec{\nabla}V = 0, \text{ da } \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \text{ beliebig (Weg } C \text{ ist beliebig)} \\
&\Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V
\end{aligned}$$

3. $\vec{F}$ ist konservativ $\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
Die Rotation von $\vec{F}$ (sprich $rot(\vec{F})$) ist ein Vektorfeld, das wie folgt definiert ist.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & - & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & - & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & - & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \vec{F}_1 & \vec{F}_2 & \vec{F}_3 \end{vmatrix} \tag{2.41}$$

- **Definition** Über total antisymmetrischen Tensor.

$$\varepsilon_{ijk} := (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1, & (ijk) = (123), (231), (321) \\ -1, & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0, & \quad\quad\quad ... \end{cases} \tag{2.42}$$

- **Vektorprodukt**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i_j=1}^{3} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \tag{2.43}$$

  Beweis: Skalarmultiplikation mit $\vec{e}_k$ von rechts.
  $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} (\frac{\partial}{\partial x_i} F_j) \vec{e}_k$

- **Einsteinsche Summenkonvention**
  Summen über doppelt auftretende Indices werden unterdrückt.
  Beispiel: $x_i y_i$ statt $\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$. Hier: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \vec{e}_k$

Beweis von (3):
„$\Rightarrow$"
$F = -\vec{\nabla} V \Rightarrow F_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k}$ für $k = 1, 2, 3$.
$\Rightarrow \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j} = 0$
$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
$\Rightarrow$ Gradientenfelder sind rotationsfrei!
„$\Leftarrow$"
$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V$ mit Hilfe des „Satzes von Stokes".

Beispiele

1. homogenes Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0$
   $\Rightarrow V = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r} + \text{const.}$, denn

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{F}_0 \cdot \vec{r}) &= (\frac{\partial}{\partial x_1} \vec{F}_0 \vec{r}, \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{F}_0 \vec{r}, \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{F}_0 \vec{r}) = \\ &= (F_{0,1}, F_{0,2}, F0, 3) = (F_{0,x}, F_{0,y}, F_{0,z}) = \\ &= \vec{F}_0 \Rightarrow \vec{F}_0 \text{ ist konservativ.} \end{aligned}$$

   Beispiel: $\vec{F}_0 = m\vec{g} \Rightarrow V = -m\vec{g}\vec{r} = mgz$ (mit $\vec{g} = |g| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$)

2. Zentralkraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$. $r = |\vec{r}|$

3.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{a} \times \vec{r} \\ \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{\varphi} a \cdot R \cdot R \cdot d\varphi' = aR^2 \varphi \\ \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} &= - \int_0^{2 \cdot \Pi - \varphi} a \cdot R \cdot R \cdot d\varphi' = aR^2(\varphi - 2\Pi) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Differenz $2\Pi a R^2 \Rightarrow \vec{F}$ nicht konservativ.

2.4.4 Arbeit und Energiesatz

In (2.4.1): $\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}(t_2)^2 - \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}(t_1)^2 = \int_{\vec{r}_1,C}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$
$\Rightarrow$
$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ $-V(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1)$
$\Rightarrow \frac{m}{2}\vec{v}(t_2)^2 + V(\vec{r}_2) = \frac{m}{2}\vec{v}(t_1) + V(\vec{r}_1) = E =$const.

Bemerkungen

1. Die potentielle Energie ist bis auf Konstante festgelegt.

2. Potentielle Energie $V(\vec{r})$ und Potential $U(\vec{r})$ werden meistens synonym verwendet - streng genommen ist zum Beispiel das Gravitationspotential (einer Masse M am Ort $\vec{r}_M$)

$$U(\vec{r}) = -G\frac{M}{|\vec{r}_M - \vec{r}|} \tag{2.44}$$

   und die potentielle Energie (einer Masse m bei $\vec{r}$)

$$V(\vec{r}) = m \cdot U(\vec{r}) = -G\frac{Mm}{|\vec{r}_M - \vec{r}|} \tag{2.45}$$

3. Die Arbeit W der äußeren Felder am Teilchen ist

$$W = \int \vec{F}d\vec{r}$$

   ($\vec{F}$ nicht notwendigerweise konservativ)
   Leistung P: $dW = \vec{F}d\vec{r} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

Energiebilanz für mehrere Teilchen
Abschnitt 2.2.2 (1):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_i^2) = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext}\dot{\vec{r}}_i \tag{2.46}$$

Zerlege $\vec{F}^{ext} = \underbrace{\vec{F}_i^{k.}}_{\text{konservativ}} + \underbrace{\vec{F}_i^{d.}}_{\text{dissipativ}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{k.}\dot{\vec{r}}_i$
$= -\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)\dot{\vec{r}}_i = -\frac{dV}{dt}$
Aus (2.46) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{d.}\dot{\vec{r}} \Rightarrow T + V = E =$const., falls (innere und äußere) dissipative Kräfte verschwinden. Dissipative Kräfte, z.B. Reibung, Zeitabhängige Kräfte.

2.5 Integration elementarer Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

2.5.1 Konstante Kraft $\vec{F} = \vec{F}_0$

1. Integration:

$$m \int_{t_0}^{t} \ddot{\vec{r}} dt' = F_0 \int_{t_0}^{t} dt' \tag{2.47}$$

$$\Leftrightarrow m\vec{v}(t) = m\vec{v}_0 + \vec{F}_0(t - t_0)$$

2. Integration:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{F}_0}{2m}(t - t_0)^2$$

2.5.2 Zeitabhängige Kraft $\vec{F} = \vec{F}(t)$

Aus (2.47) $\Rightarrow m\vec{v}(t) = m\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')dt'$
(Impulsänderung entspricht Kraftstoß)

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} \vec{F}(t'')dt''dt'$$

2.5.3 Geschwindigkeitsabhängige Kraft

1. Eindimensionale Bewegung: $m\dot{v} = F(v)$ (siehe 2.3.2(3))

2. $\vec{F} = -f(v)\vec{v}, f(v) \geq 0$
   $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2, \frac{dT}{dt} = m\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -f(v)\vec{v}\vec{v} = -f(v)v^2 \leq 0$

3. $\vec{F} = \vec{f}(\vec{v}) \times \vec{v}$
   $\Rightarrow \vec{F}(\vec{v})\vec{v} = 0 \Rightarrow$ Keine Arbeitsleistung
   $\Rightarrow \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}\vec{v}_0^2$ kinetische Energie ist erhalten
   $\Rightarrow |\frac{d\vec{r}}{dt}| = const.$, nicht aber $\frac{d\vec{r}}{dt}$!

   Beispiel Lorentz-Kraft
   $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$ mit $e = 1$, hier: $\vec{B} = (0, 0, B)$.
   $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$
   $y(0) = 0, \dot{y}(0) = v_{y_0}$
   $z(0) = 0, \dot{z}(0) = v_{z_0}$

$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \Leftrightarrow m\dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{B}$

$$m\ddot{x} - B\dot{y} = 0 \tag{2.48}$$
$$m\ddot{y} + B\dot{x} = 0 \tag{2.49}$$
$$m\ddot{z} = 0 \tag{2.50}$$

1. Schritt: $u := x + iy, u(0) = x_0, \dot{u}(0) = iv_{y_o}$
„2.48+i·2.49":

$$m(\ddot{x} + i\ddot{y}) + iB\dot{x} - B\dot{y} = 0$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{u} + iB\dot{u} = 0$$

2. Schritt: Lösung durch Exponentialansatz

$$u = u_0 + e^{i\omega t}$$
$$\Rightarrow mu_0(-\omega^2)e^{i\omega t} - \omega B u_0 e^{i\omega t} = 0$$
$$\Rightarrow \omega^2 + \omega\frac{B}{m} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = -\frac{B}{m}$$

sind zwei unabhängige Lösungen!
$\Rightarrow u(t) = u_1 + u_2 e^{-i\frac{B}{m}t}$,

$$u(0) = x_0 \Rightarrow u_1 + u_2 = x_0$$
$$\dot{u} = iv_{y_0} \Rightarrow -\frac{B}{m}u_2 = v_{y_0}$$
$$\Rightarrow u_2 = -\frac{mv_{y_0}}{B}, u_1 = x_0 - u_2$$
$$\Rightarrow u(t) = (x_0 + \frac{mv_{y_0}}{B}) - \frac{mv_{y_0}}{B}e^{-i\frac{B}{m}t}$$
$$\Rightarrow x(t) = \Re\{u(t)\} = x_0 + \frac{mv_{y_0}}{B}(1 - \cos(\frac{B}{m}t))$$
$$\Rightarrow x(t) = \Im\{u(t)\} = \frac{mv_{y_0}}{B}(\sin(\frac{B}{m}t))$$
$$\Rightarrow z(t) = v_{z_0} \cdot t (\text{aus } 2.50)$$

Ergibt eine Schraubenlinie um $\vec{B}$, mit Frequenz $\frac{B}{m}$.

2.5.4 Das (mathematische) Pendel

Rücktreibende Kraft:

$$F_R = -mg \cdot \sin\varphi \tag{2.51}$$

$$s = l \cdot \varphi, \ddot{s} = l \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow m\ddot{s} = ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0 \tag{2.52}$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{g}}$.

1. Kleine Ausschläge
$$0 = \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi \approx \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi$$
$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: $\varphi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ harmonische Schwingung, mit A, B aus $\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$.

2. Große Ausschläge
   - Energie: $\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi) = E$
   - an Umkehrpunkten: $\dot{\varphi} = 0, E = V(\pm\varphi_0) = mgl(1-\cos\varphi)$
   - Kapitel (2.3):
   $$t = \int_0^{\varphi} \frac{ds'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-V]}} = \int_0^{\varphi} \frac{l d\varphi'}{\sqrt{\frac{2}{m}mgl[\cos\varphi' - \cos\varphi_0]}}$$
   Durch eine Quadratur über Periode T folgt:
   $$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\varphi_0}{2})$$
   mit $K(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-z^2\sin^2\alpha}}$ - ist ein vollständig elliptisches Integral der ersten Art.

2.6 Rotierendes Bezugssystem

- Sei KS' ein Koordinatensystem (x', y', z'), das bezüglich dem Inertialsystem (x, y, z) mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ rotiert.
- Ziel:
$$m\dot{\vec{r}}' = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \tag{2.53}$$
1. Schritt: Fester Vektor $\vec{G}$ in KS':
$$|d\vec{G}_{rot}| = |\vec{G}||d\vec{\varphi}|\sin\theta$$

$$d\vec{G}_{rot} \perp \vec{\omega}, d\vec{G}_{rot} \perp \vec{G}$$
$$\Rightarrow d\vec{G}_{rot} = d\vec{\varphi} \times \vec{G} = (\vec{\omega} dt) \times \vec{G}$$

2. Schritt: $\vec{G}(t)$ ändert sich in KS': $d\vec{G}_{\text{KS'}}$.
$\Rightarrow$ Gesamtänderung: $d\vec{G}_{\text{IS}} = d\vec{G}_{\text{KS'}} + \vec{G}_{rot}$

$$(\frac{d\vec{G}}{dt})_{\text{IS}} = (\frac{d\vec{G}}{dt})_{\text{KS'}} + \vec{\omega} \times \vec{G} \tag{2.54}$$

Änderung des Ortsvektors:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\vec{e}'_i(t) = \vec{r}'$$
$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}\vec{e}'_i + \sum_{i=1}^{3} x'_i(t) \underbrace{\frac{d\vec{e}'_i}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{e}'_i}$$
$$= \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

3. Schritt: Bewegungsgleichung in KS':

- 2.54 angewendet auf $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$:

$$(\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt})_{\text{IS}} = (\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'))_{\text{KS}} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

- Teilchen unter Einfluss von $\vec{F}^{(e)}$ in IS:

$$(m \cdot \ddot{\vec{r}})_{\text{IS}} = \vec{F}^{(e)}$$

$\rightsquigarrow$ im rotierenden System:

$$m \cdot \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}^{(e)} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')}_{\text{Drehbeschleunigung}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

Bemerkungen

1. Coriolis- und Zentrifugalkraft sind Scheinkräfte (Trägheitskräfte).
2. Sie sind nicht-Newtonsche Kräfte; $\Rightarrow$ Newtonsche Axiome gelten nicht im beschleunigten Bezugssystem.

Kapitel 3

Lagrange-Formalismus

3.1 Zwangsbedingungen, -Kräfte und generalisierte Koordinaten

- System von N Teilchen mit $3N$ Koordinten
- Es mögen M unabhängige Zwangsbedingungen existieren

1. Die Zwangsbedingungen heißen *holonom*, wenn sie sich darstellen lassen durch
$$f^{(j)}(x_1, ..., x_{3N}, t) = 0(j = 1, ..., M) \tag{3.1}$$
   - Rheonom: $\frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} \neq 0$
   - Skleronom: $\frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} = 0$

Beispiel Perle auf rotierenden Stange
Konstante Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$\Rightarrow f(x, y, t) = y - x \cdot \tan(\omega t) = 0$
$\Rightarrow$ holonome, rheonome Zwangsbedingungen. Holonome Zwangsbedingungen in differentieller Form

$$\frac{df^{(j)}}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} = 0$$

bzw. durch totales Differential ausgedrückt.

$$df^{(j)} = \sum_{i}^{3N} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} dt = 0$$

Beispiel

$$dy - \tan(\omega t)dx - \frac{x\omega}{\cos^2(\omega t)} dt = 0$$

2. Nicht holonome, lassen sich nicht durch Gleichung (3.1) ausdrücken.

   (a) z.B. auf Kugeloberfläche mit der Form $f^{(j)}(x_1, ..., x_{3N}, t) >= 0$. Beispiel dazu: Teilchen im Schwerefeld.

   $$r^2 - R^2 >= 0$$

   (b) z.B. die sich *nur* in in differentieller Form schreiben lassen:

   $$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} dx_i + a_0^{(j)} dt = 0 \qquad (3.2)$$

Beispiel Rollende Kreisscheibe auf Ebene
Lage der Schreibe durch 5 Koordinaten beschrieben: x, y, ψ (Drehwinkel), ϑ (Neigungswinkel), φ (momentane Abrollrichtung).
Geschwindigkeit $\vec{v}$ in xy-Ebene.

$$\begin{aligned}
|\vec{v}| &= v = \frac{d}{dt}(R \cdot d\psi) = R\dot{\psi} \\
\dot{x} &= v \cos\varphi = R \cos\varphi \dot{psi} \\
\dot{y} &= v \sin\varphi = R \sin\varphi \dot{psi} \\
\Leftrightarrow & \quad dx - R\cos\varphi d\psi = 0 \\
& \quad dy - R\sin\varphi d\psi = 0 \\
& \quad f^{(1)}(x, y, \varphi, \psi) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} dx + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} dy + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi} d\psi \\
\Rightarrow & \quad \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} = 1; \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} = 0; \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi} = -R\cos\varphi
\end{aligned}$$

Aber $\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial\varphi\partial\psi} = R \sin\varphi$ und $\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial\psi\partial\varphi} = 0$ - dies ist Widerspruch!
$\Rightarrow$ Zwangsbedingungen lassen sich nicht auf holome Form bringen. Zwangsbedingungen in differentieller Form

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i dx_i + a_0 dt = 0$$

ist holonom, falls ein totales Differential einer Funktion f existiert mit $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; a_0 = \frac{\partial f}{\partial t}$.
Das ist der Fall, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

erfüllt ist, d.h.

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Generalisierte Koordinaten

- Statt der $3N$ kartesischen Koordinaten kann man irgendwelche anderen Koordinaten $(q_1, ..., q_{3N})$ wählen
- Wähle q_i, so dass durch Zwangsbedingungen eine Koordinate $q_j = const.$ ist
- M Zwangsbedingungen $\Rightarrow 3N - M$ unabhängige Koordinaten

Zwangskräfte

- Zwangskräfte dienen zur Einhaltung der Zwangsbedingungen (z.B. Bewegung auf Ebene)
- Idealisierung tatsächlich physikalischer Kräfte, die nicht im Detail, sondern nur in Hauptwirkung untersucht werden
- Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(e)}}_{*_1} + \underbrace{\vec{F}_i^{(c)}}_{*_2}$$

Mit $*_1$ eingeprägter Kraft und $*_2$ der Zwangskraft.

3.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Kann man (bei M holonomen Zwangsbedingungen) die $3N - M$ Bewegungsgleichungen ohne genaue Berechnung der Zwangskräfte aufstellen?
$\rightsquigarrow$ zusätzliches Prinzip erforderlich.

3.2.1 Virtuelle Verrückungen

- unterscheide:
  - *aktuale* Verrückungen - Ortsänderung im Lauf der Zeit (siehe Gleichung (3.2)).
  - *virtuelle* Verrückung - Vergleich zweier möglicher Postionen (x_i und $x_i + \delta x_i$) des Systems zur gleichen Zeit, die mit Zwangsbedingungen verträglich sind:
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} \delta x_i = 0$$
    Aus $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(c)}$ folgt für N Teilchen:
$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{(e)}) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(c)} \delta \vec{r}_i \tag{3.3}$$

- *d'Alembert*
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(c)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \tag{3.4}$$
  die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet.

Bemerkungen

1. Nicht aus Newtonschen Axiomen ableitbar
2. Bei rheonomen Zwangsbedingungen ist nur die virtuelle, nicht aber die reale Arbeit der Zwangskräfte 0.
   $N = 1$: $\vec{F}_i^{(c)} \delta \vec{r} = 0$, aber $\vec{F}_i^{(c)} d\vec{r} \neq 0$.
3. $N > 1$: Summanden
   $\vec{F}_i^{(c)} \delta \vec{r}_i$ muss nicht notwendigerweise 0 sein. (Siehe Kypers (6. Auflage) Seite 15)
   Aus (3.3) und (3.4) folgt d'Alembert-Gleichung:
$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}} - \vec{F}_i^{(c)}) \delta \vec{r}_i = 0$$
   Zwangskräfte tauchen nicht mehr explizit auf! Annahme holonomer Zwangsbedingungen:
   $\Rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, ..., q_{3N-M}, t), (i = 1, ..., N)$
   $\Rightarrow \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q} \delta q_j, \delta q_j$: unabhängig
   $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i^{(c)}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 0$ für $j = 1, ..., n = 3N - M$.

3.3 Die Lagrangegleichungen 2. Art

Motivation Betrachten als Beispiel das Doppelpendel. Aufstellen der Newtonschen Bewegungsgleichung sehr komplex. Unser Ziel wird sein, einen Formalismus zu finden, der zur Aufstellung der Beewegungsgleichung ausgehend von kinetischer und potentieller Energie ausreicht.

3.3.1 Herleitung

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i = 0, (\vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}_i) \tag{3.5}$$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Virtuelle Arbeit der $\vec{F}_i$:

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j})}_{=:Q_j}\delta q_j \tag{3.6}$$

Q_j: generalisierte Kraft (nicht unbedingt Einheit *Newton*).

1. Term in Gleichung (3.5):

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j})\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) - m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}))\delta q_j \tag{3.7}$$

Nebenrechnung

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j})\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Damit folgt aus Gleichung (3.7):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}) - m_i\vec{v}_i(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}))\delta q_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\vec{v}_i^2) - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\vec{v}_i^2)\delta q_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j})\delta q_j
\end{aligned}$$

Mit kinetischer Energie $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^2$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j)\delta q_j = 0$$

- Jetzt folgende Annahme: M holonome Zwangsbedingungen. $n = 3N - M$ unabhängige q_j.
- Unabhängigkeit der q_j:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \tag{3.8}$$

  f: $j = 1, ..., n$

- Keine Zwangsbedingungen mehr
- Beliebige eingeprägte Kräfte Q_j.
- Zusätzliche Annahme: konservative Kräfte $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$.

$$\Rightarrow Q_j = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N}\nabla_i V\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial}{\partial q_i}V(\vec{r}_1(q_1,...,q_n),...,\vec{r}_n(q_1,...,q_n))$$

Es sei $\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_j} = 0$.

Definition 6 (Lagrangefunktion)

$$L := T(q_1, ..., qn, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t) - V(q_1, ..., q_n)$$

Damit folgt aus Gleichung (3.8):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, j = 1, ..., n = 3N - M \tag{3.9}$$

Dies ist die Lagrangegleichung 2. Art (sog. Euler-Lagrange Gleichung).

Bemerkungen

1. Lagrange sind *forminvariant* unter Koordinaten-Transformationen (sog. Punkttransformationen) $q_j \longrightarrow Q_j(q_i, t)$, d.h. für $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$ folgt:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_j} = 0$$
Beweis dazu in Kuypers - Klassische Mechanik Seite 29.

   Beispiel Transformation von kartesischen auf ebene Polarkoordinaten.
$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}, \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}$$
$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), V(x,y) = V(r,\varphi)$$
Lagrangegleichungen angewandt:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$
Entsprechend: $m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$.
$\rightsquigarrow$ Polarkoordinaten:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(mr^2 - mr\dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$
$\Rightarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichungen sind *nicht* forminvariant.

2. „Rezept" zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen:
   (a) Schreibe $L = T - V$ in Abhängigkeit von $3N$ geeigneten generalisierten Koordinaten (ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen).
   (b) Drücke mit Hilfe der Zwangsbedingungen die $3N$ durch $3N - M$ unabhängigen Koordinaten aus.
   (c) Drücke L durch $3N - M$ q_j und $\dot{q}_j$ aus.
   (d) Stelle Lagrangegleichungen auf.
   (e) Suche Lösung

3.3.2 Beispiel: Rollpendel

Wenden Rezept auf das Beispiel an. Koordinaten: x_1, y_1, x_2, y_2.

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g y_2$$

Finden zwei Zwangsbedingungen im System:

$$y_1 = 0; x_2 = x_1 + l \cdot \sin\varphi, y_2 = -l \cdot \cos\varphi$$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\cos\varphi +^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}) + m_2 g l \cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l(\ddot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi) = 0$$

Auf das suchen einer Lösung wird verzichtet.

3.3.3 Krummlinige Koordinaten

Wähle je nach gegebenen Problem (Symmetrien) geeignete Koordinaten.

1. (Ebene) Polarkoordinaten (r, φ)

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \rightsquigarrow \varphi = \arctan\frac{y}{x}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   Kinetische Energie $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 var\dot{p}hi^2)$.

2. Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)

$$x = \varrho\cos\varphi, y = \varrho\sin\varphi z = z \rightsquigarrow \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan\frac{y}{x}, z = z$$

   Kinetische Energie $T = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

3. Kugelkoordinaten (sphärische Koordianten) (r, ϑ, φ)

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, y = r\sin\vartheta\sin\varphi, z = r\cos\vartheta$$

$$\rightsquigarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

   Kinetische Energie $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)$

3.3.4 Beispiel: Sphärisches Pendel

Generalisierte Koordinaten $q_i = \{r, \theta, \varphi\}$.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\cos\theta$$

Aus $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), V = -mgz$. Folgt:

Schritt 1

$$\Rightarrow T = (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta), V = mgr\cos\theta$$

Schritt 2 - Zwangsbedingungen

$$r = l, \dot{r} = 0$$

Schritt 3

$$L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

Schritt 4 - Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = 0 \\
&\Rightarrow \quad ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = l_z \rightsquigarrow dot\varphi = \frac{l_z}{ml^2\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Schritt 5 - Lösen Mithilfe der aufgestellten Gleichungen und Anfangsbedingungen lösen.

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \frac{l_z^2}{m^2l^4\sin^4\theta}\sin^2\theta) - mgl\cos\theta$$

Lösung durch Seperation der Variablen

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}}\sqrt{E - \frac{1}{2m}(\frac{l_z}{l\sin\theta})^2 + mgl\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{E - \frac{1}{2m}(\frac{l_z}{l\sin\theta})^2 + mgl\cos\theta}} = \int_{t_0}^{t}dt'$$

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta'}{\sqrt{E - \frac{1}{2m}(\frac{l_z}{l\sin\theta})^2 + mgl\cos\theta}}$$

Lösung der Differentialgleichung nur mit Hilfe von Anfangsbedingungen möglich. Danach:

$$t - t_0 = f(\theta, \theta_0)$$

Umkehrfunktion bilden, um $\theta = f(t, \theta_0, t_0)$ zu erhalten. Wir benötigen daher folgende Komponenten: $\theta_0, \dot{\theta}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$.
Um ein Gefühl für die Lösung zu bekommen kann man folgenden Ansatz machen:

$$E = l^2(\frac{m\dot{\theta}^2}{2} + V_{eff}(\theta)), V_{eff}(\theta) = \frac{l_z^2}{2ml^4 \sin^2\theta} - \frac{mg}{l}\cos\theta$$

3.3.5 Zyklische Koordinaten

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Falls $\frac{\partial L}{\partial q_j} = const. \Rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = const.$

Beispiele

1. $$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = const., p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = const., p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = const.$$

2. Sphärisches Pendel (Wie in (3.3.4))

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = l_z = p_\varphi = ml^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta$$

3. Rollpendel

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + 2l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

3.3.6 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Falls $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$, dann folgt aber $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i})$.

$$L = T - V$$

3.3.7 Elektromagnetische Kraft

$\vec{B}, \vec{E}$ sind Vektorfelder. Wir führen das Vektorpotential $\vec{A}$ ein, während ϕ ein Skalarpotential ist.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \vec{B} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Lorentz-Kraft ist definiert als:

$$\vec{F}_L = e(\underbrace{\vec{E}}_{-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} + \vec{v} \times \underbrace{\vec{B}}_{\vec{\nabla} \times \vec{A}})$$

$$\Rightarrow F_i^L = -e\frac{d}{dt}A_i - e\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v}\vec{A} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow L = T - V = T - e\phi - e\vec{v}\vec{A}$$

3.3.8 Eichtransformationen

Ersetze L mit $L'(q, \dot{q}, t) = \frac{dF(q,t)}{dt} + L(q, \dot{q}, t)$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}}_{=0} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

Bemerkungen

1. Lagrangefunktion ist nur bis auf $\frac{d}{dt}F(q,t)$ festgelegt.

2. $P' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = P + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}(\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}) = P + \frac{\partial F}{\partial q}$

3. Elektromagnetische Felder

$$\vec{B} = rot(\vec{A}), \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichtransformation angewendet:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t), \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r}, t)$$

$$L = \frac{m}{2}v^2 - e\phi + e\vec{A}\vec{v}, L' = T' - U' = T - U - e\frac{\partial}{\partial t}\Lambda - e\vec{\nabla}\Lambda\vec{v} = L - e\frac{d}{dt}\Lambda(\vec{r}, t)$$

$\Rightarrow$ Langrangegleichungen sind invariant unter Eichtransformation Λ.
$\Rightarrow$ Eichinvarianz

3.4 Lagrangegleichungen 1. Art

Explizite Behandlung der Zwangskräfte.

3.4.1 Herleitung

- Siehe (3.2):
$$m_i\ddot{x}_i = F_i^{(e)} + F_i^{(c)} \tag{3.10}$$
- M Zwangsbedingungen
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} dx_i + a_0^{(j)} dt = 0$$
- virtuelle Verrückungen
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} \delta x_i = 0 \tag{3.11}$$
- d'Alembert-Gleichung:
$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i^{(e)})\delta x_i = 0 \tag{3.12}$$
- Berücksichtigung der Nebenbedingungen (Zwangsbedingungen) durch *Lagrange-Multiplikation* λ_j (zunächst beliebig):
$$\sum_{j=1}^{M} \lambda_j (\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} \delta x_i) = 0 \tag{3.13}$$
Aus (3.12)-(3.13) folgt:
$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i^{(e)} - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_i^{(j)})\delta x_i = 0 \tag{3.14}$$
- $(3N - M)$ Koordinaten δx_i sind frei wählbar
$\Rightarrow i = 1, ..., 3N - M$ Klammern sind gleich 0.
- M λ_1 werdenso gewählt, dass $i = 3N - M + 1, ..., 3N$ Klammer gleich 0 sind.
$$m_i\ddot{x}_i = F_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_i^{(j)}, i = 1, ..., 3N \tag{3.15}$$
mit (für $j = 1, ..., M$):
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} \dot{x}_i + a_0^{(j)} = 0$$
Bildet die Lagrangegleichung 1. Art.

Bemerkungen

1. System von $3N + M$ Gleichungen für $3N + M$ Funktionen $x_i(t), \lambda_j(t)$.

2. Vergleich mit (3.10):
$$F_i^{(c)} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_j a_i^{(j)}$$

3.4.2 Beispiel: Atwood'sche Fallmaschine

Anfangsbedingungen:
$$z_1(0) = z_2(0) = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$$

(Holonome) Zwangsbedingungen:
$$z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow \dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$$

Lagrangegleichungen:
$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + 1 \cdot \lambda$$
$$m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + 1 \cdot \lambda$$

Zwangskraft bildet die Spannung im Faden: $\rightsquigarrow$ Lösungsansatz unter der Annahme, dass λ unabhängig von t ist.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= -\frac{1}{2}(g - \frac{\lambda}{m_1})t^2 \\ z_2(t) &= -\frac{1}{2}(g - \frac{\lambda}{m_2})t^2 \\ z_1(t) &+ z_2(t) = 0 \Rightarrow \lambda = 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Annahme war also gerechtfertigt, da λ in der Tat unabhängig von t ist.

$$z_1(t) = -\frac{g}{2}(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})t^2$$

$$z_2(t) = \frac{g}{2}(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})t^2$$

$\Rightarrow$ Fall mit verringerter Schwerebeschleunigung.

3.4.3 Fall konservativer Kräfte und generalisierte Koordinaten

In (3.3.1) wurde aus der d'Alembert Gleichung die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3N}(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i)\delta q_i = 0$$

hergeleitet. Dabei waren q_i $3N$ gegebenfalls unabhängige Koordinaten. Mit $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ (siehe (3.14)) folgt nun:

$$\sum_{i=1}^{3N}(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i})\delta q_i = 0, L = T - V$$

Berücksichtigung der Zwangsbedingungen über Lagrange-Multiplikation und Herleitung analog zur Gleichung (3.11) bis (3.15).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{M} a_i^{(j)}\lambda_j$$

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^{(j)} dq_i + a_0^{(j)} dt = 0$$

Lagrangegleichungen 1. Art für Potentialkräfte

Bemerkungen

1. Vorteil gegenüber Lagrange 2 ist, dass diese Gleichungen auf Differentielle (nicht Holonome) Zwangsbedingungen anwendbar sind und man die Zwangskräfte über die Gleichungen erhält.

2. Rezept:

   - Wahl von $3N$ geeigneten Koordinaten
   - Zwangsbedingungen in differentieller Form aufstellen $\rightarrow a_i^{(j)}$
   - Bilde $L = T - V$ als Funktion von $3N q_i$ und $3N \dot{q}_i$ Koordinaten
   - Berechnung der $3N$ Lagrangegleichungen

3.5 Das Hamiltonsche Prinzip

3.5.1 Wirkungsintegral und Variationsprinzip

- Das d'Alembertsche Prinzip ist ein differentielles Prinzip.

- Das Hamiltonsche dagegen ein integrales Prinzip.
- Ein physikalisches System ist durch seine n Freiheitsgrade charakterisiert. Die Momentane Konfiguration durch n generalisiert Koordinaten $q_1(t), ...q_n(t)$ gegeben.

3.5.2 Wirkungsintegral und Variationsraum

Konfigurationsraum - Raum alles Koordinaten $3N$. Vorgabe: Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$ ist Funktion von t und Anfangsbedingung.

Definition 7 (Wirkungsintegral)

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt$$

S ist Funktional der Bahnen $q_i(t)$.

Vergleiche $S = S(q_i(t_1), \dot{q}_1(t_1), t_2)$ mit S für virtuelle Bahn im Konfigurationsraum. Dies ist geometrisch, aber nicht dynamisch, möglich.

Hamilton'sches Prinzip der stationären Wirkung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = 0$$

Für festes t_1, t_2. Die tatsächliche Bahn liefert gegenüber allen benachtbarten virtuellen Bahnen einen Extremwert (im Allgemeinen, ist die tatsächliche Bahn minimal). Das heißt, dass die Variation um die tatsächliche Bahn verschwindet.

Bemerkungen

1. $\delta S = 0$ wird axiomatisch als Basis der Mechanik gefordet; fundamentales Prinzip.
2. Lagrangegleichungen daraus ableitbar (siehe (3.5.4)).
3. Die Formulierung ist Koordinatenunabhängig
$$L = T - V$$
4. Im Allgemeinen ist die Wirkung S der tatsächlichen Bewegung minimal.
5. Bahn wird statt aus den $2(3N - M)$ Anfangsbedingungen $q_i(t_1), \dot{q}_i(t_2)$ aus den $2(3N - M)$ Randbedingungen $q_i(t_1), q_i(t_2)$ bestimmt.
6. Variationsprinzipien sind auch in anderen Bereichen der Physik von Bedeutung. Als Beispiel kann man das Ritz'sche Variationsprinzip in der Quantenmechanik anführen.

3.5.3 Beispiel: Massenpunkt im Schwerefeld

$n = 3$ Freiheitsgrade, $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, $t_1 = 0, t_2 = T$. Endpunkt: $x(T) = vT, y(T) = 0, z(T) = -\frac{1}{2}gT^2$
α ist ein Beispiel für eine virtuelle Bahn mit:

$$x(t) = vt, y(t) = 0, z(t) = -\frac{1}{2}gtT$$

$$\Rightarrow S_\alpha = \int_0^T \frac{m}{2}(v^2 + \frac{1}{4}g^2T^2) + \frac{m}{2}g^2Ttdt = \frac{m}{2}v^2T + \frac{3}{8}mg^2T^3$$

β ist die tatsächliche Bahn mit:

$$x(t) = vt, y(t) = 0, z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow S_\beta = \int_0^T \frac{m}{2}(v^2 + g^2t^2) + \frac{m}{2}g^2t^2dt = \frac{m}{2}v^2T + \frac{3}{9}g^2T^3$$

Also folgt, dass $S_\beta < S_\alpha$ gilt.

3.5.4 Äquivalenz zu Lagrangegleichungen 2. Art

Variation der Bahn:

$$q_i(t) = q_i^{(0)}(t) + \varepsilon\eta_i(t), \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(q_i^{(0)} + \varepsilon\eta_i, \dot{q}_i^{(0)} + \varepsilon e\dot{t}a_i, t)dt = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i)dt = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i - (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\eta_i)dt + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i)}_{=0} = \\
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\eta_i dt = 0
\end{aligned}$$

Da $\eta_i(t)$ beliebig gilt (bis auf Randbedingung):

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Bemerkungen

1. Unabhängigkeit der η_i entspricht Unabhängigkeit der δq_i. Somit holonome Zwangsbedingungen.

2. Äquivalenz zu Lagrange 1. Art. Siehe dazu Goldstein / Kuypers.

3. Allgemeine Äquivalenz von Variationsprinzip und Euler-Lagrange-Gleichungen: $y(x)$ Funktion mit $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (3.16)$$

Beispiel: Minimalfläche (Seifenhaut) Seifenhaut zwischen 2 Kreisen nimmt minimale Fläche an, die zu berechnen ist. Die Lösung dieses Problems stammt von Leonard Euler (1707-1783).

$$A = 2\pi \int_1^2 y ds$$

mit:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$
$$\Rightarrow A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

Nebenrechnung: Falls F in (3.16) nicht explizit x-abhängig ist:

$$\begin{aligned}
H: &= F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} \Rightarrow \frac{dH}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \\
&= y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\
&\Rightarrow H = const. = \alpha \Rightarrow H = y\sqrt{1+y'^2} - y' \underbrace{y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}_{=\partial F/\partial y'} = \alpha \\
&\Rightarrow y' = \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{\alpha}\sqrt{y^2 - \alpha^2} dx \Rightarrow x - x_0 = \int_{x_0}^{x} dx = \alpha \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \\
&= \alpha(\cosh^- 1(\frac{y}{\alpha}) - \cosh^- 1(\frac{y_0}{\alpha})) \\
&\Rightarrow y = \alpha \cosh\frac{x - x_0}{\alpha}, \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})
\end{aligned}$$

3.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wiederholung Lagrange-Funktion unabhängig von q_j. $\Rightarrow$ System ist invariant unter Verschiebung q_j (Symmetrie) $\Rightarrow$ q_j zyklisch; $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = const.$.

3.6.1 Erhaltunsgrößen und Noethertheorem

Definition 8 *Eine Funktion $f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ heißt Erhaltungsgröße, Konstante der Bewegung, wenn für beliebige Bahnen $q_i(t)$ gilt:*

$$\frac{d}{dt} f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = 0$$

Integration von n Bewegungsgleichungen (falls möglich)
$\Rightarrow q_i = q_i(t, q_k(0), \dot{q}_k(0))$ mit $2n$ Anfangsbedingungen $q_k(0), \dot{q}_k(0)$.

1. Drücke $q_k(0), \dot{q}_k(0)$ durch $q_i(t)$ aus. Führen zu Konstanten der Bewegung (maximal).
2. Im Allgemeinen $f(q_i, \dot{q}_i, t) = C(q_k(0), \dot{q}_k(0))$. Wert von f ist abhängig von der Bahn.

Noethersche Theorem (Emmy Noether, 1882-1935, Mathematikerin)
Jeder Symmetrieoperation, die das physikalische System unverändert lässt (jede Invarianz der Lagrangefunktion unter stetig differenzierbaren Koordinatentransformationen) entspricht eine Erhaltungsgröße.

3.6.2 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Kein Zeitpunkt ausgezeichnet, weshalb die Invarianz von L gegenüber einer Transformation der Zeit folgt:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + \tau)$$

Also ist L nicht explizit zeitabhängig. Somit folgt $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

$$\frac{d}{dt} L = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i)$$

Mit Hilfe von Lagrange 2. Art folgt nun:

$$\sum_{i=1}^{n} ((\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} H = 0, H := \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Somit ist H eine Erhaltungsgröße: *Jacobi-Integral.* H heißt Hamiltonfunktion.
Sei $L = T(q,\dot{q}) - V(q)$ mit T homogen quadratisch in $\dot{q}_i$:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\mu_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \\
\frac{dH}{dt} &= 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L) = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_{j=1}^{n}\mu_{kj}\dot{q}_j - L) \\
&= \frac{d}{dt}(2T-(T-V)) = \frac{d}{dt}(T+V) = \frac{dE}{dt}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung!

Beispiel Perle auf Draht

$$\begin{aligned}
L &= T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - V, \dot{\varphi} = \omega \\
H &= \dot{r}\frac{m}{2}2\dot{r} - \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{m}{2}r^2\omega^2 + V = \\
&= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - \omega^2 r^2) + V, H \neq E
\end{aligned}$$

Da L nicht homogen quadratisch in r^2 ist (E=T+V).

3.6.3 Homogenität des Raumes und Impulserhaltung

Kein Raumpunkt ausgezeichnet, daher folgt Invarianz gegenüber Transformation:

$$L(\vec{r}_i + \vec{a}, \dot{\vec{r}}_i, t) - L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0$$

Über eine Taylorentwicklung gelangt man nun zu folgender Funktion:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{a}\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}L + o(\vec{a}^2)$$

Für beliebig infinitesimale Translationen $\vec{a}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}L = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{d}{dt}(m_i\dot{\vec{r}}_i) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i}V \underbrace{=}_{L=T-V} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i}L$$

Aus (3.17) folgt nun:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i = 0$$

$\Rightarrow$ *Erhaltung des Gesamtimpulses!*

3.6.4 Isotropie des Raumes und Drehimpulserhaltung

Keine Raumrichtung ausgezeichnet, daher folgt, dass L invariant gegenüber kleiner Drehung ist.

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i$$

$$L(\vec{r}_i + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i + \Delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_i, t) - L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = 0$$

Wiederrum wird über eine Taylorentwicklung zum Ergebnis geführt:

$$\sum_{i=1}^{n}((\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)\underbrace{\vec{\nabla}_{r_i}}_{\partial x, \partial y, \partial z} L + (\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{v}_i}}_{\partial\dot{x}, \partial\dot{y}, \partial\dot{z}} L) + o(\Delta\varphi^2)$$

Mit Hilfe von Lagrange 2 folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \Delta\vec{\varphi}\sum_{i=1}^{n}(\vec{}_i \times \frac{d}{dt}\vec{p}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i) + o(\Delta\varphi^2) = \\ = \quad & \Delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{p}_i + o(\Delta\varphi^2) \end{aligned}$$

Für beliebige $\Delta\vec{\varphi}$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i = \frac{d}{dt}\vec{L} = 0$$

$\Rightarrow$ *Erhaltung des Gesamtdrehimpulses!*

3.6.5 Allgemeine Formulierung des Noethertheorems

Betrachten Koordinatentransformationen

$$q_i \to q_i' = q_i'(q_1, ..., q_{3N-M}, t, \alpha) = q_i'(q, t\alpha)$$

die im Parameter α stetig differenzierbar sind und $q_i = q_i'$ für $\alpha = 0$ erfüllen (zum Beispiel $q_i \to q_i' = q_i + \alpha$).
Falls $L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t\alpha) = L(q', \dot{q}', t)$ so folgt:

$$\Rightarrow I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{3N-M}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial\alpha}\mid_{\alpha=0}$$

ist Erhaltungsgröße!

Erweiterung Falls $L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}F(q, t, \alpha)$ so folgt:

$$\Rightarrow J = I - \frac{\partial}{\partial\alpha}F(q', t, \alpha)\mid_{\alpha=0}$$

ist Erhaltunsgröße!
Beweis dazu: Siehe Kuypers. Aufgabe auf Übungsblatt 8.

Weitere Symmetrien

- Symmetrien wie in (3.6.2)-(3.6.4) gelten für abgeschlossene Systeme
- Für nicht abgeschlossene System sind $E, \vec{P}, \vec{L}$ im Allgemeinen nicht erhalten. Einzelne Symmtrien sind dennoch erhalten, weshalb es einzelne Erhaltungsgrößen (und somit einzelne zyklische Koordinatne) gibt.
- Es ist im Allgemeinen nicht möglich, durch Koordinatenrtransformationen zu erreichen, dass alle Koordinaten zyklisch sind.

Kapitel 4

Zentralkraftproblem

4.1 Reduktion des Zweikörperproblems

- 2 Massenpunkte m_1, m_2 an Orten $\vec{r}_1, \vec{r}_2$
- Schwerpunkts- und Relativkoordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}, \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \Leftrightarrow \vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1-m_2}\vec{r}\end{aligned}$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}^2$$

- Kraft zwischen m_1 und m_2: $\vec{F} = \vec{F}'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ (wegen Homogenität des Raumes)
- Betrachte Zentralkräfte $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

Mit $M := m_1 + m_2, m := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ (m heißt reduzierte Masse) folgt:

$$L_{ges} = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

was ingesamt 6 Freiheitsgrade ergibt. Bezüglich der Homogenität des Raumes folgt:

- $\vec{R}$ ist zyklisch
- $M\dot{\vec{R}} = const.$ (Verallgemeinerter Impuls)
- gleichförmige Schwerpunktsbewegung und entkoppelte Relativbewegung $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$ Lagrangefunktion der Relativbewegung (reduzierte Masse m im Zentralfeld (in welchem V nur von r abhängt - also unabhängig vom Winke ist), 3 Freiheitsgrade)

4.2 Relativbewegung

4.2.1 Erhaltungsgrößen

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ und L homogen quadratisch in $\dot{\vec{r}}$.
$\Rightarrow$ Energieerhaltung mit $E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r)$.
Zentralpotential $V(r)$
$\Rightarrow$ sphärische Symmetrie (Isotropie des Raumes)
$\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const.$
$\Rightarrow$ wegen $\vec{r} \perp \vec{L}$ liegt $\vec{r}$ in fester Ebene (2 Freiheitsgrade)
Verwende ebene Polarkoordinaten r, φ:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2) - V(r) \tag{4.1}$$

φ ist zyklisch $\Rightarrow p(\varphi) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = const. = |\vec{L}| = l$

$$\Rightarrow \vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\hat{e}_z \tag{4.2}$$

Geometrische Interpretation: Aus (4.2) folgt:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}) = 0$$

Flächengeschwindigkeit bei Planetenbahnen ist $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = const. = \frac{l}{2m}$ über $dA = \frac{1}{2}r(r\varphi)$ also konstant. Darauf beruht das 2. Keplersche Gesetz: *Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

4.2.2 Lösung der Bewegungsgleichungen

Aus (4.2) folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$$

eingesetzt und mit (4.1) folgt:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r) - \frac{l}{2mr^2})}$$

Seperation der Variablen:

$$dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2})}} \tag{4.3}$$

Umkehrpunkte: $\dot{r} = 0$ bei r_0. Sei $r(t_0 = 0) = r_0$

$$\Rightarrow t = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2})}} \tag{4.4}$$

$+/-$ für wachsendes bzw. fallendes r.
$\Rightarrow t = t(r) \rightsquigarrow r = r(t)$ falls Auflösung nach r möglich.
Bestimmung von $\varphi(t)$:
Aus (4.2) folgt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2(t)}, \varphi(0) = \varphi_0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{l}{m}\int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')} + \varphi_0 \tag{4.5}$$

Bahnkurve $r(\varphi)$:
Substituiere $dt' \to dr'$ (4.3) in (4.5).

$$\Rightarrow \varphi(r) = \varphi(r_0) \pm l\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{2m(E - V(r') - \frac{l^2}{2mr'^2})}} \tag{4.6}$$

Bemerkungen

1. (4.4)-(4.6): vollständige Integration der Bewegungsgleichung
2. $\varphi(r)$ bzw. $r(\varphi)$ lässt sich berechnen ohne Kenntnis von $r(t), \varphi(t)$.
3. Für $V(r) = \alpha r^{n+1}$ mit $n \in 1, -2, -3$: $\Rightarrow \varphi(r)$ gegeben durch trigonometrische Funktionen.
   Für $V(r) = \alpha r^{n+1}$ mit $n \in 5, 3, 0, -4, -5, -7$: $\Rightarrow \varphi(r)$ gegeben durch elliptische Funktionen.

4.3 Effektives Potential

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r))}_{V_{eff}(r)}$$

Betrachtung des effektiven Potentials $V_{eff}(r)$. Diskutieren diverse Energiepotentiale.

- $E > 0$ - $r(t) \geq r_{min}$ offene Bahnen.
- $E = 0$ - Restgeschwindigkeit $v = 0$ für $r \to \infty$.

$$0 = \frac{d}{dt} V_{eff} = \frac{dV}{dr} - \frac{l^2}{mr^3} \Rightarrow R = (\frac{m}{l^2}\frac{dV}{dr})^{-\frac{1}{3}}$$

- $E < 0$ - $r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$ Gebundene Bewegung. Aus (4.4) folgt: Schwingungsdauer

$$T = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}}$$

Gleichzeitiges Vorrücken von (4.5):

$$\Delta\varphi = 2\frac{l}{m}\int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{dt'}{r^2(t')} \geq 0$$

mit $t_{max} = t_{min} + \frac{T}{2}$. Im Allgemeinen keine geschlossene Bahnkurve (d.h. $\Delta\varphi \neq \frac{k}{n}2\pi; k, n \in \mathbb{N}$)

- $E = E_{min}$ - $\dot{r}^2 = 0 \Rightarrow$ Kreisbewegung

Bertrandsches Theorem (1873) Geschlossene Bahnkurve existiert nur für $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ und $V(r) = kr^2$.

4.4 Das Kepler-Problem

$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ mit $\begin{cases} \alpha = \gamma m_1 m_2 & \text{Graviationspotential} \\ \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon} q_1 q_2 & \text{Coloumbpotential} \end{cases}$
Bewegung $r(t), \varphi(t)$ sind nicht geschlossen angebbar - daher Betrachten wir $r(\varphi)$.

4.4.1 Berechnung des Integrals (4.6) für $\varphi(r)$

- Substitution: $s = \frac{1}{r}$.

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = -\int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2m\alpha}{l^2}s' + s'^2}} \tag{4.7}$$

- Integraltafel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin(\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}})$$

für $a < 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$. Hier $a = -1, b = \frac{2m\alpha}{l^2}, c = \frac{2mE}{l^2}$.

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \arcsin([\frac{1 - \frac{l^2 s'}{m\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{El^2}{m\alpha^2}}}]_{s_0}^{s}) \tag{4.8}$$

Wähle $\varphi_0 = \varphi(t_0)$ so, dass $r_0 = r(t_0) = r_{min}$.

- Nullstellen der Wurzel in (4.7) (Umkehrpunkt: $E = V_{eff}$)

$$s_0 := \frac{m\alpha}{l^2}(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}})$$

- Untere Grenze: $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{l^2/m\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{4.9}$$

(folgt aus $\sin(\varphi - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{1-(l^2 s/m\alpha)}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}} \cos(\varphi-\varphi_0)}$)
Mit Parameter und Exzentrizität

$$p = \frac{l^2}{m\alpha}, e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \tag{4.10}$$

folgt $r(\varphi) = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$.

- Kegelschnitt (Schnitt einer Ebene mit Kreiskegel) in Polarkoordinaten:

	Energie	Bahnkurve
$e > 1$	$E > 0$	Hyperbel
$e = 1$	$E = 0$	Parabel
$0 \leq e < 1$	$E = -\frac{\alpha}{2a}$	Ellipse (entspricht 1. Keplersche Gesetz)
$e = 0$	$E = -\frac{\alpha}{2R}$	Kreisbahn

Fall $E < 0$, das heißt $e < 1$

- Ellipse ist gegeben durch Punkte $r_1 + r_2 = 2a$. Konstruktion einer Ellipse über sogenannte Gärtnerkonstruktion.

- Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen a, b:

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}, b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

- Kepler-Ellipse:
  - große Halbachse: $a = \frac{\alpha}{2|E|}$
  - kleine Halbachse: $b = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$

  Die große Halbachse ist nur von der Energie abhängig - nicht vom Drehimpuls!

4.4.2 Der Runge-Lenz-Vektor

Zusätzliche dynamische Symmetrie für $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Daraus folgt neue Erhaltungsgröße:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

Aus dem Noether-Theorem folgt:

- $\vec{A} \perp \vec{L}$ (liegt in Bahnebene)
- $\vec{A}$ zeigt zum Perihel.
- $|\vec{A}| = mae, A^2 = 2mEl^2 + m^2\alpha^2$, $\vec{A}$ liefert also feste Ausrichtung der Keplerellipse.

4.4.3 Gesamtbewegung

Bei $m_1 \gg m_2$ gilt:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t) \longrightarrow \vec{r}_1(t) = \vec{R}(t)$$

$$\vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t) \longrightarrow \vec{r}_2(t) = \vec{R}(t) - \vec{r}(t)$$

4.4.4 Die Kepler'schen Gesetze

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen mit Sonne im Brennpunkt.
2. $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2m} = const.$ (Flächengeschwindigkeit ist konstant)
3. $$T^2 \sim a^3$$

Beweis Ellipsenfläche $A = \pi ab = \pi a \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} = \pi a l \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}$. Andererseits gilt:

$$A = \int_0^T \frac{dA}{dt} = T \frac{l}{2m}$$

$$\Rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{\alpha} a^3$$

Sei nun $m_1 = m_p$ Planet, $m_2 = m_s$ die Sonne:

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} \frac{1}{\gamma m_p m_s} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{1}{m_s}$$

Somit folgt für alle Planeten:

$$\Rightarrow T^2 \approx \frac{(2\pi)^2}{\gamma m_s} a^3$$

Reale Planetenbahnen Aus Störungen folgt eine Periheldrehung (nach jedem Umlauf). Am Besten sieht man das am Beispiel des Merkurs. Dieser unterliegt dem Einfluss anderer Planeten, welcher ca. $5,3$ Bogensekunden pro Jahr ausmacht. Dazu kommen noch relativistische Effekte (Allgemeine Relativitätstheorie) mit $0,4$ Bogensekunden pro Jahr, was also insgesamt zu einer Periheldrehung von $5,7$ Bogensekunden pro Jahr führt.

3-Körper-Problem

- 9 Freiheitsgrade, aber nur $\vec{P}, \vec{L}, E$ sind erhalten (7 Erhaltungsgrößen)
- Theorem von Bruns (1887): Es existieren keine weiteren Erhaltungsgrößen, die algebraische Funktionen von $\vec{r}, \vec{p}$ sind.

$\Rightarrow$ 3 Körper Problem ist nicht integrabel

$\Rightarrow$ Klassisches Chaos

4.5 Der Virialsatz

Definition 9 *Der zeitliche Mittelwert einer beschränkten Funktion $f(t)$ ist*

$$\langle f \rangle := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Für periodische Bewegung gilt:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

mit der Periodendauer T.
Betrachten nun N Teilchen:

$$\begin{aligned}
2T &= \sum_{i=1}^N m_i\dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \vec{p}_i\dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^N \vec{p_i}_i\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N \vec{r}_i\dot{\vec{p}}_i \\
\Rightarrow 2\langle T\rangle &= \underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^N \vec{p}_i\vec{r}_i \mid_0^\tau}_{=0} + \sum_{i=1}^N \langle \vec{r}_i\vec{\nabla}_i V\rangle \\
\Rightarrow \quad 2\langle T\rangle = & \quad \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \vec{r}_i\vec{\nabla}_i V\rangle}_{\text{Virial (Clausius)}}
\end{aligned}$$

Für $N = 1$ und $V(r) = ar^n$ folgt:

$$\begin{aligned}
2\langle T\rangle &= \langle \vec{r}\cdot\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r}\rangle = \langle r\frac{dV}{dr}\rangle = n\langle V\rangle \\
\langle T\rangle &= \frac{n}{2}\langle V\rangle \\
E = \langle E\rangle &= (\frac{n}{2}+1)\langle V\rangle \\
\Rightarrow \langle V\rangle &= \frac{2}{2+n}E, \langle T\rangle = \frac{n}{2+n}E
\end{aligned}$$

Beispiel

1. harmonischer Oszillator, $n = 2$

$$\Rightarrow \langle T\rangle = \langle V\rangle = \frac{1}{2}E$$

2. Kepler-Problem, $n = -1, E < 0$

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle, \langle V\rangle = 2E$$

4.6 Streuung

4.6.1 Definition des Wirkungsquerschnitts

- Streuproblem: b als Stoßparameter, θ als Streuwinkel

- Rotationssymmetrie bezüglich φ. (Bild siehe Fließbach)
- eindeutiger Zusammenhang: $\theta = \theta(b)$.
- Bruchteil $2\pi b db$ der Teilchen wird in Fläche abgelenkt:

$$2\pi R \sin\theta (R d\theta) \tag{4.11}$$

  bzw. in Raumwinkel $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ abgelenkt.

- Strahl einfallender Teilchen mit Stromdichte

$$j := \frac{\text{Anzahl der einfallenden Teilchen}}{\text{Zeit mal Fläche}} = \frac{\Delta N_0}{\Delta t \Delta A}$$

  Teilchenstrom durch $d\Omega$:

$$\frac{\Delta(\theta)}{\Delta t}$$

- **Definition 10 (Differentieller Wirkungsquerschnitt)** *Streuquerschnitt ist:*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := \frac{\frac{\Delta N(\theta)}{\Delta t d\Omega}}{j} = \frac{\textit{Teilchenstrom pro } d\Omega}{\textit{einfallende Stromdichte}} \tag{4.12}$$

- $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hat Einheit Fläche („Querschnitt")
- Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} : \text{Fläche, an der Teilchen effektiv getrennt werden} \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \end{aligned}$$

4.6.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

- Annahmen:
  - Streuung der Projektilteilchen maximal an einem Target
  - Keine Wechselwirkung zwischen Projektilen

  $\Rightarrow$ Zwei-Körper-Problem

- Stoßparameter und Drehimpuls:

$$l = m v_\infty b = \sqrt{2mE} b \tag{4.13}$$

- einfallender Strom zwischen b und $b+db$ ist gleich dem Strom zwischen θ und $d\theta$:
$$j2\pi b|db| = j2\pi \sin\theta |d\theta| \frac{d\theta}{d\Omega}$$
Also gleich Teilchen durch Zeit. Im Allgemeinen ist $\frac{db}{d\Omega} < 0$, daher Verwendung von Beträgen:
$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta} |\frac{db(\theta)}{d\theta}| \tag{4.14}$$
Änderung des Bahnvektors von $\varphi(r=\infty)$ bis $\varphi(r_{min})$ - siehe (4.6):
$$\varphi_0 = l \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{l^2}{r'^2}}}$$

- Streuwinkel:
$$\theta(b) = \pi - 2\varphi_0 \tag{4.15}$$
$$\Rightarrow \theta(b) = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{bdr'}{r'^2 \sqrt{1 \frac{b^2}{r'^2} - \frac{V(r')}{E}}}$$

4.6.3 Rutherfordscher Streuquerschnitt

Streuung von α-Teilchen ($z_1 = 2$) an Atomkernen einer Goldfolie ($z_2 = 79$):
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$$
Bahnkurve: Hyperbel
$$\frac{|p|}{r} = -1 - e\cos\varphi, |p| = \frac{l^2}{\mu|\alpha|}, e = \sqrt{1 + (\frac{2Eb}{\alpha})^2} > 1$$
r_{min} bei $\varphi_{min} = \pi$, $r = \infty$ bei $\cos\varphi_\infty = -\frac{1}{e}$.
$$\varphi_0 = |\varphi_{min} - \varphi_\infty| = |\pi - \varphi_\infty|$$
$$\cos\varphi_0 = \cos|\pi - \varphi_\infty| = -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2Eb}{\alpha})^2}}$$
$$\sin^2\varphi_0 = 1 - \cos^2\varphi_0 \Rightarrow \tan\varphi_0 = \frac{2Eb}{|\alpha|}, \varphi_0 = \frac{1}{2}(\pi - \theta) \Rightarrow b(\theta) = \frac{|\alpha|}{2E} \cot\frac{\theta}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \begin{cases} 0, & b \longrightarrow \infty \\ \pi, & b \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{|\alpha|}{2E}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Rutherfordsche Streuformel (1911):

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{z_1 z_2 e^2}{16\pi\varepsilon_0 E})^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Bemerkung

1. Streuformel basiert auf Atommodell, das von sehr kleinen, positiv geladenen Kern ausgeht (1913 experimtell verifiziert)
2. Klassisches Ergebnis stimmt mit den Quantenmechanischen für $\frac{1}{r}$-Potential überein (Glücklicher Zufall)
3. Totaler Streuquerschnitt:

$$\sigma = 2\pi \int_0 \pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \int_0^\pi d\theta \cos\frac{\theta}{2}\frac{1}{\sin^3\frac{\theta}{2}} \rightarrow \infty$$

   - Divergenz bei $\theta = 0 (b \rightarrow \infty)$, da $\frac{1}{r}$-Potential langreichtweitig ist (Teilchen mit großen b werden stets gestreut)
   - Im Experiment ist Coulomb-Potential durch Elektronen abgeschirmt, also ist σ endlich.

4.6.4 Schwerpunkts- und Laborsystem

Beobachtungen werden im Allgemeinen im Laborsystem gemacht, während die Berechnungen einfacher im Schwerpunktsystem sind.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M} \equiv 0$$

Ziel Bestimmung der Zusammenhänge zwischen θ und θ_s, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\frac{d\sigma_s}{d\Omega_s}$. Verwenden dazu Impulserhaltung vor und nach dem Stoß. Energieerhaltung bei elastischen Stößen, das heißt Stoßprozessen, bei denen mechanische Energie erhalten bleibt, das heißt nicht in andere Formen (Deformationsenergie, Anregungsenergie) umgesetzt wird. Laborsystem vor dem Stoß:

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2, \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{V}, \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}$$

Schwerpunktsystem vor dem Stoß:

$$\vec{v}_{1,s} = \vec{v}_1 - \vec{V} = \frac{m_2}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m}{m_1}\vec{v}, \vec{p}_{1,s} = m\vec{v}$$

$$\vec{v}_{2,s} = \vec{v}_2 - \vec{V} = -\frac{m_1}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{m}{m_2}\vec{v}, \vec{p}_{2,s} = -m\vec{v}$$

mit $m = \frac{m_1 m_2}{M}, \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow$ Impulse vor Stoß entgegengesetzt gleich
$\Rightarrow$ Impulse nach Stoß entgegengesetzt gleich

Elastischer Stoß Relativgeschwindigkeit v vor und nach Stoß gleich - Richtung aber verändert.

$$\Rightarrow \vec{v}'_{1,s} = \frac{m_2}{M} v\vec{e}_0, \vec{v}'_{2,s} = -\frac{m_1}{M} v\vec{e}_0$$

Laborsystem nach elastischem Stoß:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{M} v\vec{e}_0 + \vec{V}, \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{M} v\vec{e}_0 + \vec{V}$$

Impulse:

$$\vec{p}'_1 = mv\vec{e}_0 + \frac{m}{m_2}\vec{P}, \vec{p}'_2 = -mv\vec{e}_0 + \frac{m}{m_1}\vec{P}$$

In der Geometrische Darstellung kann C überall auf dem Kreis liegen. Zur Beachtung eines wichtigen Sonderfalles: Target ruht $\vec{v}_2 = 0, \vec{v}_1 = v$:

$$\Rightarrow \frac{m}{m_1}\vec{P} = \frac{m}{m_1} m_1 \vec{v}_1 = m\vec{v}_1$$

$\Rightarrow B$ liegt auf Kreis.

Beziehung zwischen Streuwinkeln θ_s und θ

$$\tan\theta = \frac{DC}{AD} = \frac{mv_1 \sin\theta_s}{\frac{m}{m_2} m_1 v_1 + mv_1 \cos\theta_s}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta_s}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\theta_s}$$

Bei $m_1 \ll m_2 \Rightarrow \theta \approx \theta_s$. Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_s}{d\Omega_s} d\Omega_s \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_s}{d\Omega_s}\frac{\sin\theta_s}{\sin\theta}\frac{d\theta_s}{d\theta}$$

Also folgt für zum Beispiel $m_1 = m_2, V = -\frac{\alpha}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\theta_s}{2}$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon E})^2 \frac{\cos\theta}{\sin^4\theta}$$

Kapitel 5

Der starre Körper

- hinreichend großer Abstand

$\Rightarrow$ System erscheint als Massenpunkt

- kleiner Abstand: Ausdehnung merklich

5.1 Kinematik

- Starrer Körper: System von N Massepunkten (Typisch: $N = 10^{23}$) mit festen Abständen
- Zwangsbedingungen $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = const.$
- Freiheitsgrade: $f = 3N - M$ Zwangsbedingungen.
- jeder weitere Massenpunkt wird durch die Vorgabe von 3 Abständen fixiert. Also $N \to N+1, M \to M+3$ für $N \geq 3$ gilt somit also: $f = 3N - M = 6 \rightsquigarrow$ Starrer Körper.
- Analoge Überlegung: Lage des starren Körpers gegeben durch:
  1. Lage des Schwerpunktes (3 Freiheitsgrade)
  2. Orientierung relativ zum Inertialsystem (3 Freitheitsgrade), da:
     - 2 Freiheitsgrade für x-Achse (2 Winkel)
     - 1 Freiheitsgrad für y-Achse

     (Parametrisierung durch Eulerwinkel)
- **Nomenklatur** Ortsfestes Inertialsystem: $S, \vec{r}$. Körperfestes Koordinatensystem: $S', \vec{r}'$, welches im Allgemeinen kein Intertialsystem ist.

$$\vec{r}_n(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'_n(t) \tag{5.1}$$

- **Theorem von Euler** Die allgemeine Bewegung eines starren Körpers lässt sich zu jedem Zeitpunkt in eine Translationsbewegung des Aufpunktes $A(t)$ und eine Drehung um eine momentane Drehachse $\vec{\omega}(t)$ durch A zerlegen.

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_n = \frac{d}{dt}\vec{R} + \frac{d}{dt}\vec{r}'_n = \frac{d}{dt}\vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_n \tag{5.2}$$

  Da $(\frac{d}{dt}\vec{r}_n)_{IS} = (\frac{d}{dt}\vec{r}_n)_{KS} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_n$ (siehe (2.53)) und $(\frac{d}{dt}\vec{r}_n)_{KS} = 0$ gilt.

- Aufpunkt A muss nicht der Schwerpunkt sein.

Beispiel Rollender Zylinder
Wir untersuchen die Bewegung von $A(t)$:

1. momentaner Drehpunkt A:

$$\dot{\vec{r}}_n = \dot{\vec{R}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{n,A} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_{n,A}$$

2. momentaner Drehpunkt B:

$$\dot{\vec{r}}_n = \dot{\vec{R}}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{n,B} = \vec{\omega} \times (\vec{r}_{A,B} + \vec{r}'_{n,B})$$

   Allgemein gilt (5.2):

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{R}}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}'_{n,A} &= \dot{\vec{R}}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}'_{n,B} = \\
&= \dot{\vec{R}}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r}'_{n,A} - \vec{r}_{A,B}) \Rightarrow \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B \\
&\Rightarrow \dot{\vec{R}}_A = \dot{\vec{R}}_B - \vec{\omega} \times \vec{r}_{A,B}
\end{aligned}$$

   ω unabhängig vonWahl von S'.

5.2 Trägheitstensor

5.2.1 Dehimpuls

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_n m_n \vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n \\
\vec{L} &= \sum_n m_n (\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_n + \vec{r}'_n \times \dot{\vec{R}} + \vec{r}'_n \times \dot{\vec{r}}'_n) \\
M &= \sum_n m_n, M\vec{R}_s = \sum_n m_n \vec{r}_n = \sum m_n(\vec{R} + \vec{r}'_n) = M\vec{R} + \sum_n m_n \vec{r}'_n \\
\vec{L} &= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + M\vec{R} \times (\dot{\vec{R}}_s - \dot{\vec{R}}) + M(\vec{R}_s - \vec{R}) \times \dot{\vec{R}} + \sum_n m_n \vec{r}'_n \times \dot{\vec{r}}_n
\end{aligned}$$

Wähle $\vec{R} = \vec{R}_s$:

$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{M\vec{R}_s \times \dot{\vec{R}}_s}_{\vec{L}_s} + \underbrace{\sum_n m_n \vec{r}'_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_n)}_{\vec{L}'} \tag{5.3}$$

Mit $\vec{L}_s$ als Drehimpuls des Schwerpunktes bezüglich des Ursprungs S und $\vec{L}'$ als Drehimpuls des starren Körpers bezüglich seines Schwerpunktes.

Dyadisches Produkt (Tensorprodukt) Schreibe:

$$\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = (\underbrace{\vec{a} \circ \vec{b}}_{:=\underline{T}})\vec{c}$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ a_2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \\ a_3(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_1 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{matrix}}_{=:\vec{a}\circ\vec{b}=\underline{T}} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{T}$ ist eine Dyade oder Tensor 2. Stufe.

$$\Rightarrow \vec{L}' = \sum_n m_n(\vec{r}'^2_n - \vec{r}'_n \circ \vec{r}'_n)\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = \underline{\theta}\vec{\omega}, L'_i = \sum_{j=1}^{3} \theta_{ij}\omega_j, \theta_{ij} = \sum_n m_n(\vec{r}'^2_n \delta_{ij} - x'_{ni}x'_{nj}) \tag{5.4}$$

Bemerkungen

1. $\underline{\theta}$ heißt Trägheitstensor
2. $\theta_{ij} = \theta_{ji} \Rightarrow$ Symmetrischer Tensor 2. Stufe mit 6 unabhängigen Elementen
3. Hauptdiagonalelemente $(\theta_{11}, \theta_{22}, \theta_{33})$ heißen *Trägheitsmomente*. Nichtdiagonalelemente heißen *Deviationsmomente*.
4. Im Allgemeinen: $\vec{L}'$ nicht parallel zu $\vec{\omega}$.

Übergang zru kontinuirlichen Massenverteilung

$$m_n \longrightarrow dm(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})dV$$

$$M = \sum_n m_n \to M = \int_V dm = \int_V \varrho(\vec{r})dV$$

$$\theta_{ij} = \int_V \varrho(\vec{r})(r^2\delta_{ij} - x_ix_j)dV$$

5.2.2 Beispiel: Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \varrho(\vec{r}) = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

Das Volumen im Kreiszylinder ist integrierbar in Kugelkoordinaten mit:

$$dV = \rho d\varphi d\rho dz$$

Somit folgt für die Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}
\theta_{11} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{M}{\pi R^2 L}(\underbrace{y^2+z^2}_{r^2-x^2=x^2+y^2+z^2-x^2}) \\
&= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2 \sin^2\varphi + \frac{M}{12}L^2 = \\
&= \frac{M}{4}R^2 + \frac{M}{12}L^2 \\
\theta_{22} &= \theta_{11} \\
\theta_{33} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{M}{\pi R^2 L}(\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}) = \frac{2M}{R^2}\int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{M}{2}R^2 \\
\theta_{12} &= -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{M}{\pi R^2 L} xy, xy = \rho^2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\rho^2\sin(2\varphi) = \\
\Rightarrow \theta_{12} &= 0 \\
\theta_{13} &= -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{M}{\pi R^2 L} \underbrace{x}_{\rho\cos\varphi} z = 0 \\
\underline{\theta} &= \frac{M}{2}\begin{pmatrix} \frac{R^2}{2}+\frac{L^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2}+\frac{L^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\underline{\theta}$ ist diagonal da Koordinaten System den Symmetrieachsen entspricht.

5.2.3 Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n^2, \vec{r}_n = \vec{R}_A + \vec{r}'_n = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_A + \dot{\vec{R}}_A \sum_n m_n \dot{\vec{r}}'_n + \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{\vec{r}}'^2_n$$

$$\dot{\vec{R}}_A \sum_n m_n \dot{\vec{r}}'_n = 0 \text{ falls } \begin{cases} \dot{\vec{R}}_A & = 0 \\ \vec{R}_A & = \vec{R}_s \end{cases}$$

Wähle $\vec{R}_A = \vec{R}_s$. Damit folgt mit (5.2):

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_s + \frac{1}{2}\sum_n m_n(\vec{\omega}\times\vec{r}'_n)^2$$

Alternativ mit (5.3):

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{\vec{r}}'_n(\vec{\omega} \times \vec{r}'_n) = \frac{1}{2}\sum_n m_n \vec{\omega}(\vec{r}' \times \dot{\vec{r}}') = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}'$$

Damit folgt aus (5.4):

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{\theta}\vec{\omega} \tag{5.5}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\theta_{ij}\omega_j \Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_s^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\theta_{ij}\omega_i\omega_j$$

Bemerkungen

1. $\underline{\theta}$ diagonal $\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\theta_i\omega_i^2$ entspricht also $\frac{1}{2}Mv^2$.
2. ω_i sind die körperfesten Komponenten von $\vec{\omega}$
3. Potentielle Energie:

   $$V(\vec{r}) = V(\vec{R}_s) + \vec{r}\vec{\nabla}V(\vec{r}) + ... \approx V(\vec{R}_s)$$

   falls $|\vec{\nabla}V(\vec{R}_s)|d \ll V(\vec{R}_s)$.

5.2.4 Steinerscher Satz

Oft ist es bequemer, θ_{ij} bezüglich Bezugssystem zu berechnen dessen Ursprung nicht im Schwerpunkt liegt.
Sei nun $\vec{a} = \vec{R}_A - \vec{R}_s$ und θ_{ij}^{SP} Komponenten von $\underline{\theta}$ bezüglich des Schwerpunktes. Dann gilt für die Komponenten von $\underline{\theta}$ bezüglich des Aufpunktes A im um A verschiedenen Koordinatensystem:

$$\theta_{ij}^A = \theta_{ij}^{SP} + M(\delta_{ij}\vec{a}^2 - a_i a_j)$$

Bemerkung

$$\theta_{11}^A = \theta_{11}^{SP} + M(a_2^2 + a_3^2)$$

entspricht der Form (von elementaren Lehrbüchern)

$$\theta^A = \theta^{SP} + Ma^2$$

Beispiel (Fortsetzung) Bewegung von $A(t) \rightsquigarrow$ kinetische Energie:

1. $$\dot{\vec{R}}_A = 0 \Rightarrow T = T_{rot} = \frac{\theta^A}{2}\omega^2 = \frac{1}{2}(\theta^{SP} + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}\theta^{SP}\omega^2 + \frac{M}{2}(\omega r)^2$$

2. $$\dot{R}_s = \omega r \Rightarrow T = \frac{M}{2}\dot{R}_s + \frac{\theta^{SP}}{2}\omega^2 = \frac{M}{2}(\omega r)^2 + \frac{\theta^{SP}}{2}\omega^2$$

Schlussfolgerung Falls momentane oder permanten Drehachse bekannt, dann wähle A auf Drehachse. Beim freien starren Körper ist es günstig den Schwerpunkt als Ursprung zu wählen.

5.2.5 Hauptachsentransformation

1. $\underline{\theta}$ ist reell-symmetrisch: $\theta_{ij} = \theta_{ji}$

2. θ_{ij} sind abhängig von der Orientierung des Körpersfesten Systems S'.

$\Rightarrow$ Kann durch Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt $\underline{\theta}^D$ gebracht werden. Das heißt es existiert eine orthogonale Matrix O mit:

$$\underline{\theta}^D = O^{-1}\underline{\theta}O$$

3. Entspricht Übergang auf Koordinatensystem entlang der Hauptträgheitsachsen (Hauptachsen).

4. θ_i: Eigenwerte, repräsentieren Eigenschaften des starren Kröpers, ähnlich wie seine Masse.

5. Bestimme θ_i aus $\det(\underline{\theta} - \theta_i 1_n) = 0$

6. Alle $\theta_i \gg 0$, denn zum Beispiel:

$$\theta_1 = \theta_{11} = \sum_n m_n(\vec{r}_n'^2 - (x'_{n,1})^2) \geq 0$$

7. Falls $\vec{\omega} \parallel$ Hauptachse, zum Beispiel $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \underline{\theta}^D \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_3\omega \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

8. Bei symmetrischen Körpern (zum Beispiel Quader) fallen die Hauptachsen mit den Symmetrieachsen zusammen.

9. Unterscheide:

   (a) $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$: Kugelkreisel

   (b) $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$: symmetrischer Kreisel (z.B. Zylinder) $\rightsquigarrow$ rotationssymmetrischer Körper

   (c) $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$: Dreiachsiger Kreisel (Hauptachsen eindeutig)

5.3 Die Eulerschen Gleichungen

Bewegungsgleichungen des starren Körpers

5.3.1 Herleitung

Summe aller Kräfte (siehe (2.2)):

$$\vec{F}^{(e)} = \dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} \tag{5.6}$$

Summe aller äußeren Drehmomente:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(e)} \tag{5.7}$$

Bemerkungen

1. Die inneren Kräfte führen (mit Zwangsbedingungen) beim starren Körper zu konstanten Abständen
2. Der Drehimpulssatz (5.7) gilt auch wenn sich $\vec{L}$ und $\vec{M}$ auf den im Allgemeinen beschleunigten Schwerpunkt des Körpers beziehen (siehe Kuypers, Kapitel 11.4).
3. Wähle als Bezugspunkt von $\vec{L}$ entweder
   - den festen Unterstützungspunkt eines Kreisels (3 Freiheitsgrade der Rotation) oder den
   - Schwerpunkt des Körpers (zusätzlich 3 Freiheitsgrade der Translation), aber (5.6) und (5.7) sind entkoppelt - betrachte (5.7).

Es gilt weiterhin (siehe (5.2.1)):

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\underline{\theta}\vec{\omega}) \tag{5.8}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{\theta}\vec{\omega}) = \vec{M} \tag{5.9}$$

$\vec{L}, \underline{\theta}, \vec{\omega}$ unabhängig vom Koordinatensystem definiert. Nach (5.9) gilt im Inertialsystem, in dem jedoch die Komponenten von $\underline{\theta}$ und $\vec{\omega}$ zeitabhängig sind:

$$\underline{\theta} = \begin{cases} \sum_{i,j} \theta_{ij}^{IS}(t) \cdot \vec{e}_i^{\,IS} \circ \vec{e}_j^{\,IS} & \text{für raumfestes Inertialsystem } S \\ \sum_{i,j} \theta_{ij} \cdot \vec{e}_i^{\,\prime}(t) \circ \vec{e}_j^{\,\prime}(t) & \text{für körperfestes Koordinatensystem } S' \end{cases}$$

mit $(\frac{d\vec{v}}{dt})_{IS} = (\frac{d\vec{v}}{dt})_{KS} + \vec{\omega} \times \vec{v}$ folgt aus (5.9):

$$(\frac{d}{dt}\underline{\theta}\vec{\omega})_{KS} + \vec{\omega} \times (\underline{\theta}\vec{\omega}) = \vec{M} \tag{5.10}$$

Sei nun das körperfeste System ein Hauptachsensystem:

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 \end{pmatrix}, \vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}, \vec{M}(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \end{pmatrix}$$

Mit (5.10) folgt nun:

$$\begin{aligned} \theta_1\dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2)\omega_2\omega_3 &= M_1 \\ \theta_2\dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1\omega_3 &= M_2 \\ \theta_2\dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1)\omega_1\omega_2 &= M_3 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die sogenannten *Eulersche Gleichungen.*

Bemerkungen

1. Differentialgleichungen für Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem.
2. Vorteil: θ_i fest - Nachteil: $M_i(t)$ zeitabhängig im Körperfesten System

5.4 Der freie Kreisel

- Kreisel (im weiteren Sinne): Rotierender, starrer Körper, der sich nicht (wie ein Maschinenteil) um eine raumfeste Achse dreht.
- freier Kreisel: Kreisel mit $\vec{M} = 0$, zum Beispiel frei fallender Körper mit Ursprung vom Koordinatensystem im Schwerpunkt.

5.4.1 Stationäre Lösung

Lösung der Euler-Gleichung (5.11) für $\vec{M} = 0$ mit $\omega = const.$:

$$(\theta_3 - \theta_2)\omega_2\omega_3 = 0, (\theta_1 - \theta_3)\omega_1\omega_3 = 0, (\theta_2 - \theta_1)\omega_1\omega_2 = 0 \tag{5.12}$$

Sei $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$ dann folgt aus (5.12):

$$\omega_1 = \omega_1^0 = const., \omega_2 = \omega_3 = 0 \tag{5.13}$$

Dies ist eine Lösung - analoge Lösungen erhält man durch Vertauschung der Komponenten. Im Inertialsystem gilt:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const., \vec{L} = \underline{\theta}\omega = \theta_1\omega_1^0\vec{e}_1'$$

Somit folgt, dass die Hauptachse $\vec{e}_1'$ konstante ist im Inertialsystem, da $\vec{\omega} = (\omega_1^0, 0, 0)$.
$\Rightarrow$ gleichförmige Rotation um die Hauptachse, die konsante Richtung im Raum hat.
Keine Allgemeine Lösung: Folgt aus speziellen Anfangsbedingungen.

5.4.2 Stabilität der Stationären Lösung

- (5.12) erlaubt 3 Lösungen, von denen nur 2 Lösungen stabil sind.
- Betrachten kleinere Abweichungen uvon Lösung (5.13):

$$\omega_1 \approx \omega_1^0, \omega_2 \ll \omega_1^0, \omega_3 \ll \omega_1^0$$

- Vernachlässige in Eulergleichungen Terme, die in kleinen Termem ω_2, ω_3 quadratisch sind:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1\dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_2)\omega_2\omega_3 \Rightarrow 0 \approx \theta_1\dot{\omega}_1 \Rightarrow \omega_1 = \omega_1^0 && (5.14) \\ 0 &= \theta_2\dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1\omega_3 && (5.15) \\ 0 &= \theta_3\dot{\omega}_3 + (\theta_2 - \theta_1)\omega_1\omega_2 && (5.16) \end{aligned}$$

Damit folgt aus (5.15):

$$0 = \theta_2\ddot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1^0\dot{\omega}_3$$

In Gleichung (5.16) eingesetzt ergibt das:

$$\theta_2\ddot{\omega}_2 + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_3}(\omega_1^0)^2\omega_2 = 0$$

Analog für ω_3.

$$\Rightarrow \ddot{\omega}_2 + D\omega_2 = 0, \ddot{\omega}_3 + D\omega_3 = 0, D = \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_3}(\omega_1^0)^2$$

2 Möglichkeiten

- 1. Stabile Oszillation um $\vec{\omega} = (\omega_1^0, 0, 0)$:

$$\theta_1 > \theta_2, \theta_3, \theta_1 < \theta_2, \theta_3 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow \omega_{2,3}(t) = a_{2,3}\cos(\sqrt{D}t + \psi_{2,3})$$

  2. Instabilität der Rotation um Achse des mittleren Trägheitsmomentes, da kleinere Abweichungen exponentiell anwachsen:

$$\theta_2 < \theta_1 < \theta_3, \theta_3 < \theta_1 < \theta_2 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \omega_{2,3}(t) = a_{2,3}e^{-\sqrt{-D}t} + b_{2,3}e^{\sqrt{-D}t}$$

5.4.3 Freier symmetrischer Kreisel

$\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$ - betrachte Allgemeine Rotation - aus (5.11) folgt:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \theta_1\dot{\omega}_1 + (\theta_3 - \theta_1)\omega_2\omega_3 &= 0 \\
\theta_1\dot{\omega}_2 + (\theta_1 - \theta_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\
\theta_3\dot{\omega}_3 + (\theta_1 - \theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_3^0 \\
\Rightarrow \dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 &= 0 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 - \Omega\dot{\omega}_2 = 0 \\
\dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1 &= 0 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = -\Omega\omega_1 \\
\Omega &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1}\omega_3^0 \\
\Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 &= 0 \\
\Rightarrow \omega_1(t) &= a_0 \sin(\Omega t + \psi_0) \\
\omega_2(t) &= \frac{1}{\Omega}\dot{\omega}_1(t) = a_0\cos(\Omega t + \psi_0) \\
\omega_3(t) &= \omega_3^0 \\
\gamma = \arctan(\frac{a_0}{\omega_3^0}), \vec{\omega}^2 &= a_0^2 + (\omega_3^0)^2 = const.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{\omega}$ rotiert auf *Polkegel* mit Winkelgeschwindigkeit Ω um Figurenachse (Symmetrieachse des symmetrischen Kreisels) in Körperfesten System.
$\Rightarrow$ **Präzession**

Beispiel Erde als freier Kreisel

- Näherung: Erde starr, freie Eigenrotation
- Erde ist an Polen abgeplattet: $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$

$$\Rightarrow \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} \approx -\frac{1}{300} \Rightarrow |\Omega| \approx \frac{1}{300}\frac{2\pi}{1d}$$

$\Rightarrow$ Periode für Erdrotation: $\approx$ 300 Tage.

5.4.4 Trägheitsellipsoid

- Im Hauptachsensystem:

$$\vec{L} = \underline{\theta}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \theta_1\omega_1 \\ \theta_2\omega_2 \\ \theta_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

- Energieellipsoid:

$$T = \frac{1}{2}(\theta_1\omega_1^2 + \theta_2\omega_2^2 + \theta_3\omega_3^2)$$

  $\Rightarrow \vec{L} \perp$ Trägheitsellipsoid im Punkt $\vec{\omega}$ (Tangentialebene)

- Symmetrischer Kreisel $\Rightarrow$ Rotationsellipsoid $\Rightarrow$ $\vec{L}, \vec{\omega}, \hat{e}_z$ in gleicher Ebene
- Länge des Lots auf Tangentialebene gegeben durch $\vec{L}\vec{\omega} = 2T = const.$.

$\Rightarrow$ Tangentialebene ist invariante Ebene, während $\vec{\omega}(t)$ (relativ zum Ellipsoid) und das Ellipsoid selbst sich beide bewegen
$\Rightarrow$ Ellipsoid rollt auf invarianter Ebene: siehe Konstruktion von Poinsot.

5.5 Die Eulerschen Winkel

5.5.1 Definition

Die Eulerschen Gleichungen bestimmen nur $\vec{\omega}(t)$ im Körperfesten System; die Eulerschen Winkel geben die Orientierung des Körperfesten Systems (und damit des Körpers) im Inertialsystem an.
Übergang vom Inertialsystem zum Körperfesten System mit Hilfe von 3 Drehungen.

Bemerkungen

1. φ und ψ durchlaufen 0 bis 2π. ϑ geht von 0 bis π.
2. Die Reihenfolge der Drehung darf nicht vertauscht werden, da Verknüpfungen vonendlichen Drehungen nicht kommutativ sind.
3. φ und ϑ geben die Lage der z-Achse des Körperfesten Systems im Inertialsystem an. *psi*: Eigendrehung um z.

5.5.2 Zusammenhang zwischen ω_i und Eulerwinkel

Schreibe: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\psi$. Projeziere $\vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\psi$ auf das Körperfeste System, um ω_i zu erhalten.

1. $\vec{\omega}_\varphi$: Im Inertialsystem (x_1, y_1, z_1) bzw. $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} = z_1)$ ist $\vec{\omega}_\varphi = (0, 0, \dot{\varphi})$. Koordinatendarstellung von $\vec{\omega}_\varphi$ im Körperfesten System (x, y, z):

$$\vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta \\ \dot{\varphi}\sin\psi\cos\vartheta \\ \dot{\varphi}\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

2. $\vec{\omega}_\vartheta$: In $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ ist $\vec{\omega}_\vartheta = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$. $\vec{\omega}_\vartheta$ im Körperfesten System (x, y, z) ist:

$$\vec{\omega}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\dot{\vartheta} \\ -\sin\psi\dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. $\vec{\omega}_\psi$: In Körperfesten System (x,y,z) ist $\vec{\omega}_\psi = (0,0,\dot{\psi})$

$\Rightarrow$ Insgesamt in Körperfesten System:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \sin\psi\dot{\varphi} + \cos\psi\dot{\vartheta} \\ \sin\vartheta\cos\psi\dot{\varphi} - \sin\psi\dot{\vartheta} \\ \cos\vartheta\dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Eulergleichungen liefert die Bewegungsgleichungen für φ, ϑ, ψ (wichtig für Kreiseltheorie).

5.5.3 Bestimmung der Eulerwinkel für den freien symmetrischen Kreisel

Freier Kreisel: $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$
Lege Inertialsystem so, dass $\vec{L} = L\hat{e}_{z_1}$.
$\hat{e}_{z_1}$ im Körperfesten System: $\begin{pmatrix} \sin\psi\sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$
$\vec{L}$ im Körperfesten System:

$$L\begin{pmatrix} \sin\psi\sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1\omega_1 \\ \theta_2\omega_2 \\ \theta_3\omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0\theta_1\sin(\Omega t + \psi_0) \\ a_0\theta_1\cos(\Omega t + \psi_0) \\ \omega_3^0\theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3^0\theta_3 &\Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 = const. \\
a_0\theta_1\sin(\Omega t + \psi_0) &\Rightarrow \psi(t) = \Omega(t) + \psi_0 \\
&\Rightarrow \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta_0 = \frac{a_0\theta_1}{\omega_3^0\theta_3} \\
\omega_1 &= \sin\vartheta\sin\psi\dot{\varphi} + \cos\psi\underbrace{\dot{\vartheta}}_{=0} \\
&\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{a_0\sin\psi}{\sin\vartheta_0\sin\psi} = \frac{a_0}{\sin\vartheta_0} = \frac{L}{\theta_1} = \omega_{\text{prä}} \\
&\Rightarrow \varphi(t) = \frac{a_0}{\sin\vartheta_0}t + \varphi_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bewegung $(\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t))$ im Inertialsystem mit ϑ: Winkel zwischen Figuren- und z_1-Achse (Inertialsystem)
$\dot{\varphi}$: Drehung der Figurenachse um z_1-Achse (reguläre Präzession)
$\dot{\psi}$: Drehung des Körpers (also vom Körperfesten System) um Figurenachse (siehe (5.4.3)).

$$\vec{\omega} = \underbrace{\vec{\omega}_\vartheta}_{=0} + \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\psi = \underbrace{\dot{\varphi}\hat{e}_{z_1}}_{IS} + \underbrace{\dot{\psi}\hat{e}_z}_{KS}$$

$\Rightarrow \vec{\omega}$ liegt in Bildebene $\hat{e}_{z_1}, \hat{e}_z$.

$$\omega_{\text{sym}} = \underbrace{\omega_3^0}_{\frac{L_3}{\theta_3}} - \omega_{\text{prä}} \cos\vartheta, \omega_{\text{prä}} = \frac{L}{\theta_1}$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{sym}} = \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_3} \omega_3^0 = \Omega$$

5.6 Kreisel im Schwerefeld

- Beispiele:
  1. Rotierende Erde im Gravitationsfeld von Sonne und Mond
  2. (Kinder)-Kreisel (unterstützter Kreisel im homogenenen Schwerefeld)
  3. Levitron
- Vorgehensweise zur Lösung der Bewegungsgleichungen des schweren Kreisels
- Lagrange-Formalismus 2. Art

$$L = T_{rot} - V = \frac{1}{2}\vec{\omega}(\underline{\theta}\vec{\omega}) - V$$

- Verwendung von Eulerwinkeln
- Interpretation: $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$
- Kreiselbewegung aufgrund von dynamischer Stabilisierung

Kapitel 6

Kleine Schwingungen

Ein Freiheitsgrad - z.B. 2-atomiges Molekül. Über Taylorentwicklung in Ruhelage (Potentialminimum) erhält man:

$$V(r) = V(r_0) + \frac{\partial V}{\partial r} |_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} |_{r=r_0} (r - r_0)^2$$

Durch einsetzen von $x = r - r_0, k = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} |_{r=r_0}$ kommt man auf:

$$V(x) = V(r_0) + \frac{1}{2}kx^2$$

$\Rightarrow$ Kleinere Schwingungen um Gleichgewichtslage sind harmonisch.
Wichtiges Beispiel: Schwingungen von Kristallgittern was zu Eigenschwingungen von Systemen mit vielen Freiheitsgraden führt.

6.1 Erzwungene Schwingungen

6.1.1 Bewegungsgleichungen

- Betrachte zusätzliche Störung $V_{ext}(r,t)$ (Zum Beispiel: Molekül im Potential eines Laserfeldes).

$$V_{ext}(r,t) = V_{ext}(r_0,t) + \frac{\partial V}{\partial r} |_{r_0} (r - r_0) = -f(t)x, f(t) := \frac{\partial V}{\partial r} |_{r_0}$$

  $\rightsquigarrow$ Äußere Kraft

- Lagrange-Funktion für kleinere Schwingungen:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + f(t)x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}f(t), \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Verallgemeinerung auf Reibung:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \tag{6.1}$$

6.1.2 Allgemeine Lösung

Betrachten zunächst $f(t) = f_\omega = const.$

$$x(t) \equiv \Re[X(t)], X \text{ komplex}$$

Realteil von Lösung von

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m}e^{i\omega t} \tag{6.2}$$

Ist identisch mit Lösung von (6.1). Allgemeine Lösung von (6.2):

$$X(t) = X_{hom}(t) + X_{part}(t)$$

Als homogene und partikuläre (spezielle) Lösung mit:

$$\ddot{X}_{hom} + 2\lambda\dot{X}_{hom} + \omega_0^2 X_{hom} = 0$$

Expontentialansatz:

$$X_{hom}(t) = Ce^{-i\nu t}, C \in \mathbb{C}, (6.2) \Rightarrow -\nu^2 - 2i\lambda\nu + \omega_0^2 = 0$$

$$\nu_{1,2} = -i\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} =: -i\lambda \pm w_0$$

1. $\omega_0 > \lambda$
   $\Rightarrow w_0 \in \mathbb{R}$

   $$\Rightarrow X_{hom}(t) = \Re\{Ce^{\lambda t \mp i w_0 t}\} = e^{-\lambda t}\Re\{C(\cos w_0 t \mp i \sin w_0 t) = A_1$$

   mit $C = A_2 \pm iA_1$ folgt

   $$X_{hom}(t) = A_1 \sin(w_0 t)e^{-\lambda t} + A_2 \cos(w_0 t)e^{-\lambda t} \Leftrightarrow Ae^{-\lambda t}\cos(w_0 t + \alpha)$$

   $\Rightarrow$ gedämpfte periodische Bewegung

2. $\omega_0 < \lambda$

   $$\Rightarrow \nu_1 = -i\lambda_1, \nu_2 = -i\lambda_2 (\lambda_1, \lambda_2 > 0)$$
   $$\Rightarrow X_{hom}(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$$

3. $\omega_0 = \lambda$
   Konstruiere:

   $$y = \frac{e^{-\lambda t + i w_0 t} - e^{-\lambda t - i w_0 t}}{w_0}, w_0 \to 0 \Rightarrow y = e^{-\lambda t}(2it)$$

   $$\Rightarrow X_{hom}(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t}$$

Partikuläre Lösung

$$X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)e^{i\omega t} \tag{6.3}$$

$$\text{mit } \chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega} \tag{6.4}$$

$\chi(\omega)$ heißt auch *dynamische Suszeptibelität.*

$$\chi(\omega) \sim \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Kraft}}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung (für $\lambda < \omega_0$):

$$x(t) = \Re\{Ce^{-\lambda t + iw_0 t} + \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)e^{i\omega t}\} \tag{6.5}$$

6.1.3 Diskussion

Betrachte $f(t) = f_\omega e^{i\omega t}, \lambda < \omega_0$

$$(6.4) \Rightarrow \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2} = |\chi(\omega)|e^{i\delta(\omega)}$$

mit $|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\lambda\omega)^2}}$

$$\tan\delta(\omega) = \frac{\Im\chi}{\Re\chi} = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{6.6}$$

Allgemeine Lösung:

$$(6.5) \Rightarrow x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_0 + \alpha) + \frac{f_\omega}{m}|\chi(\omega)|\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

A, α sind durch Anfangsbedingungen gegeben. Für $t \gg \frac{1}{\lambda}$:

$$x(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega)), B(\omega) = \frac{f_\omega}{m}|\chi(\omega)| \tag{6.7}$$

Erzwungene Schwingung im eingeschwungenen Zustand.
Maximum von $B(\omega)$liegt bei $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ (Resonanzfrequenz - welche aus der Ableitung von $B(\omega)$ folgt.)

1. $\omega = 0$: statischer Antrieb

$$\Rightarrow B(0) = \frac{f_0}{m\omega^2}, \delta(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Auslenkung B in Richtung der Kraft f_0

2. $\omega \ll \omega_0$
   $\Rightarrow \tan\delta(\omega) \approx \delta(\omega) = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2} \Rightarrow$ Lösung $x(t)$ hinkt etwas $f(t)$ hinterher.

3. $\omega = \omega_0$

$$\Rightarrow \delta(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) \sim \cos(\omega - \frac{\pi}{2})$$

   Ist außer Phase mit $f(t) \sim \cos\omega t$.

4. $\omega \gg \omega_0$
   $\Rightarrow \tan\delta(\omega) \approx \frac{2\lambda}{\omega} \longrightarrow 0$
   $\Rightarrow \delta(\omega) \longrightarrow -\pi \Rightarrow$ Schwingung ist gegenläufig.

Fall schwacher Dämpfung: $\lambda \ll \omega_0$

$$\Rightarrow \omega_{res} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 - \frac{\lambda^2}{\omega_0}$$

$$|\chi(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2(\omega_0+\omega)^2 + 4\lambda^2\omega^2} \approx \frac{1}{4\omega_0^2((\omega_0-\omega)^2+\lambda^2)}$$

Über $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \approx \omega_0$ erhält man diese *Lorentz-Kurve*.

6.2 Fourierentwicklung

Notwendig für Konstruktion der Lösung der Schwingungsgleichung für beliebigen Antrieb $f(t)$.

6.2.1 Fourierreihen

- In Physik und Technik treten häufig (zeit-)periodische Funktionen auf, $f(t) = f(t+T)$.
- Daher als Ansatz für $f(t) = f(t+T)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \tag{6.8}$$

  Mit den Fourierkoeffizienten a_n, b_n. Bestimmung der $a_n, b_m (n, m \in \mathbb{N})$:

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{a_0}{2}T \Rightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

- Mit
$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \frac{T}{2}\delta_{nm}$$
und
$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$$
folgt aus (6.8):
$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{T}{2}\delta_{nm} = \frac{T}{2}a_m$$
$$\Rightarrow a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt \tag{6.9}$$
$$\Rightarrow b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)dt \tag{6.10}$$

- Wann ist Fourierentwicklung möglich?

Satz von Dirichlet Sei

1. $f(t) = f(t+T)$
2. T kann in endlich viele Zeitintervalle zerlegt werden, in denen $f(t)$ monoton und stetig ist
3. An den Unstetigkeitsstellen existieren links und rechtsseitige Grenzwerte

$\Rightarrow$ die Fourierreihe (6.8)-(6.10) für $f(t)$ konvergiert und ist gleich

1. $f(t)$ an Stetigkeitsstellen
2. $\frac{1}{2}(f(t_i - 0) - f(t_i + 0))$ an Unstetigkeitsstellen t_i (dabei bezeichnet $-0, +0$ die Unstetigkeit von links bzw. rechts)

Bemerkungen

1. Für gerade ($f(t) = f(-t)$) (ungerade($f(t) = -f(-t)$)) Funktionen ist $b_n = 0$ ($a_n = 0$).

2. Zerlegung von $f(t)$ in Grundschwingungen mit Frequenz ω und Oberschwingungen (ωm). Das führt zu Fourierzerlegung bzw. Fourieranalyse, d.h. Anwendung von (6.9) und (6.10) auf $f(t)$.

3. Mit $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)$ folgt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{2}\begin{cases} a_n - ib_n & n > 0 \\ a_0 & n = 0 \\ a_{-n} + ib_{-n} & n < 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

6.2.2 Fourier-Integrale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega \int_{-T/2}^{T/2} f(t')e^{in\omega(t-t')}dt'$$

Für $T \to \infty$ ist $f(t)$ nicht länger periodisch und die Frequenzen $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$ rücken dichter zusammen. Ersetze: $\omega \to \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta\omega)\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{i\omega(t-t')}dt' \\
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} && (6.12) \\
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-i\omega t'}dt' && (6.13)
\end{aligned}$$

$\tilde{f}(\omega)$: Fourier-Transformierte von f; gilt auch für nichtperiodische Funktionen.

6.3 Schwingungen mit beliebigen Antrieb

Lösungen von $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$ für beliebiges f:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t)$$

$$x_{part}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{f}(\omega)}{m}\chi(\omega)e^{i\omega t} \tag{6.14}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{part} + 2\lambda\dot{x}_{part} + \omega_0^2 x_{part} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{f}(\omega)}{m}\chi(\omega)(\frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda\frac{d}{dt} + \omega_0^2)e^{i\omega t} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{f}(\omega)}{m}e^{i\omega t} = \frac{f(t)}{m}
\end{aligned}$$

Rezept

1. Berechne $\tilde{f}(\omega)$ für gegebenes $f(t)$.
2. Berechne Integral (6.14)

6.3.1 Harmonische Schwingungen eines Systems von Massepunkten

Berechnung von Schwingungen für kleine Auslenkungen um stabile Ruhelagen mit dem Ziel die kollektiven Eigenschwingungen zu bestimmen.

6.3.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen

System gekoppelter Teilchen mit f Freiheitsgraden.

$$V = V(q_1, ..., q_f)$$

Stabiles Gleichgewicht: $q_i = q_i^0$
Kleine Auslenkungen: $q_i = q_i^0 + x_i$

$$\Rightarrow V(q_1, ..., q_f) = \underbrace{V(q_1^0, ..., q_f^0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i}}_{=0} |_{q_i^0} \; x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}}_{=:V_{ij}} |_{q_i^0, q_j^0} \; x_i x_j$$

Die Nullsummen ergeben sich durch Minimum (1. Ableitung ist Null) und durch die freie Wahl des Nullpunktes.

$$\Rightarrow V(x_1, ..., x_f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} V_{ij} x_i x_j ; V_{ij} = V_{ji}$$

Dadurch ergibt sich für die kinetische Energie (homogen quadratisch in $\dot{q}_i$):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1} T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j ; T_{ij} = T_{ji}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{f} (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j)$$

Somit ergibt sich eine Formel für die Bewegungsgleichungen:

$$\sum_{j=1}^{f} (T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j) = 0, (i = 1, ..., f) \qquad (6.15)$$

- T_{ij}, V_{ij} koppeln die Freiheitsgrade, die sich dadurch gegenseitig beeinflussen.
- System von f linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Koeffizienten die Konstant sind.
- e-Ansatz:
$$x_j(t) = ca_j e^{i\omega t} \tag{6.16}$$
$$(6.15) \Rightarrow \sum_{j=1}^{f} (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) a_j = 0 \tag{6.17}$$
Homogenes lineares Gleichungssystem für f Unbekannte a_j.
$\Rightarrow$ nicht triviale Lösung, falls für $f \times f$-Determinante gilt:
$$\det(V - \omega^2 T) = 0$$
$\Rightarrow f$ Lösungen $\omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_f^2$ im Allgemeinen komplex. Falls ω_k^2 negativ reell ist der komplex folgt $\omega_k = +\sqrt{\omega_k^2}$ oder $\omega_k = -\sqrt{\omega_k^2}$ hat Imaginärteil.
$\Rightarrow e^{i\omega_k t}$ divergiert - stabile Minima folgt für alle $\omega_k^2 > 0$ und reell.
- Für $\omega_k^2 > 0$ gibt es positive und negative ω_k. Wegen $\Re\{(A+iB)\exp(\pm i\omega t)\} = A\cos\omega t \mp B \sin\omega t$ genügt es $\omega_k > 0$ zu betrachten.
- Falls $\omega_k^2 = 0 \Rightarrow$ Schwingungsgleichungen $\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \ddot{x}_k = 0$.
$$x_k(t) = c_1 + c_2 t$$
- Zu jedem ω_k existiert eine spezielle Lösung (6.16)
$$x_{jk}(t) = \Re\{c_k a_{jk} e^{i\omega_k t}\}$$
x_{jk}heißt Eigenmode bzw. Eigenschwingung
- Die Eigenvektoren $\vec{a}_k = (a_{1k}, ..., a_{fk})$ sind aus (6.17) zu bestimmen.

6.3.3 Beispiel: 2 gekoppelte Oszillatoren

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), V = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 = k(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

Wähle Exponentialansatz: $x_j = ca_j e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(V_\omega^2 T) = 0 \Rightarrow (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0$$
$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \omega_2^2 = 3\frac{k}{m}$$

1. Eigenschwingung: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das System schwingt also im sogenannten *Gleichtakt*.
2. Eigenschwingung: $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -a_2 \Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das System schwingt also im sogenannten *Gegentakt*.

6.3.4 Normalkoordinaten

Gleichung (6.17) entspricht einem Eigenwertproblem:

$$\underline{V}\vec{a}_k = \omega_k^2 \underline{T}\vec{a}_k$$

Wähle nun:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{fk} \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation:

$$\vec{a}_k^T \underline{T} \vec{a}_k' = \delta_{kk'}$$

Allgemeine Lösung von (6.17) ist eine Linearkombination von Eigenvektoren $\vec{a}_k$:

$$\vec{x}(t) = \Re\{\sum_{k=1}^{f} c_k \vec{a}_k e^{i\omega_k t}\} = \sum_{k=1}^{f} b_k \cos(\omega_k t - \delta_k)\vec{a}_k \tag{6.18}$$

Komplexe Koeffizienten c_k bzw. reelle Koeffizienten b_k, δ_k festgelegt durch $2f$ Anfangsbedingungen.
Bewegung $x_j(t)$ im Allgemeinen nicht periodisch, da die ω_k nicht kommensurabel, das heißt $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{m}{n}, (m, n \in \mathbb{N})$ sind.
Führe *Normalkoordinaten* Q_k

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{f} Q_k \vec{a}_k$$

ein, die mit ω_k periodisch sind:

$$Q_k = b_k \cos(\omega_k - \delta_k)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2L &= \dot{\vec{x}}\underline{T}v\dot{e}cx - \vec{x}\underline{V}\vec{x} = \\
&= \sum_{k,k'} (\dot{Q}_k \underbrace{\vec{a}_k \underline{T} \vec{a}_{k'}}_{\delta_{kk'}} \dot{Q}_{k'} - Q_k \vec{a}_k \underbrace{\underline{V}\vec{a}_{k'}}_{\omega_k^2 \underline{T}\vec{a}_{k'}} Q_{k'}) = \\
&= \sum_k (\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q}_k(t) + \omega_k^2 Q_k(t) = 0 \tag{6.19}$$

$\Rightarrow$ Entkoppelte Bewegung für Q_k.

Beispiel (6.3.3) Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}(b_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

Normalkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}(Q_1(t) + Q_2(t)) \\
x_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m}}(Q_1(t) - Q_2(t))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_1(t) = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 + x_2), Q_2(t) = \sqrt{\frac{m}{2}}(x_1 - x_2)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_1^2 Q_1^2 - \omega_2^2 Q_2^2)$$

$$\Rightarrow \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0, \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0$$

1. Eigenschwingung: $\omega = \omega_1, x_1 = x_2 \Rightarrow Q_2 = \equiv$
2. Eigenschwingung: $\omega = \omega_2, x_1 = -x_2 \Rightarrow Q_1 \equiv 0$

6.4 Kontinuirliche Systeme

6.4.1 Die schwingende Saite

(transversale Bewegung)
Annahmen: $m_i = m, k_i = k_0, l_0$: Ruhelänge der Feder, Potential:

$$V = \frac{k_0}{2} \sum_n (\sqrt{l^2 + (\phi_n - \phi_{n-1})^2} - l_0)^2$$

Kleine Auslenkungen:

$$\phi_n - \phi_{n-1} \ll l \Rightarrow V \approx \frac{k_0}{2} \sum_n (l + \frac{1}{2} \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{l} - l_0)^2 \approx const. + \frac{k_0}{2} \sum_n \frac{l - l_0}{l} (\phi_n - \phi_{n-1})^2$$

(vernachlässige Terme 4. Ordnung)
Nur für $l > l_0$ gibt es harmonischen Anteil, das heißt die Saite muss vorgespannt sein.
Bewegungsgleichung (lineare Massendichte $\varrho = \frac{m}{l}$, Vorspannkraft $K = k_0(l - l_0)$):

$$m\ddot{\phi}_i + \frac{K}{l}(\phi_i - \phi_{i-1}) - \frac{K}{l}(\phi_{i+1} - \phi_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varrho\ddot{\phi}_i - \frac{K}{l^2}(\phi_{i-1} - \phi_i + \phi_{i+1} - \phi_i) = 0$$

Kontinuumslimes ($l \to 0, m \to 0, \varrho = \frac{m}{l} = const.$):

$$\phi_i \to \phi(x), \phi_{i\pm1} \to \phi(x \pm l), \phi(x + \pm l) - \phi(x) = \pm \frac{d\partial\phi}{\partial x} l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} l^2 + O(l^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{l \to 0} (-\frac{1}{l^2}(\phi_{i-1} - \phi_i + \phi_{i+1} - \phi_i)) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Somit folgt die Saitengleichung, also die eindimensionale Wellengleichung:

$$\Rightarrow (\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})\phi(x,t) = 0, c = \sqrt{\frac{k}{\varrho}}$$

6.4.2 Lösung der Wellengleichung

Neue Variablen $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ mit

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \phi(\xi, \eta) = 0$$

Somit folgt, dass die Allgemeine Lösung $\phi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct)$. Also kann man sagen, dass $f(x - ct)$ nach rechts läuft mit Geschwindigkeit c, während $g(x + ct)$ nach links läuft mit Geschwindigkeit c.

Harmonische Schwingungen: $\phi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$, k: Wellenzahl, ω: Kreisfrequenz - Saitengleichung:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = c^2k^2 \Rightarrow \omega(k) = c|k|$$

Dispersionsrelation in 3 Dimensionen:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \underbrace{(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2})}_{\Delta})\phi(\vec{r},t) = 0$$

Lösung ergibt eine ebene Welle mit $\phi(\vec{r},t) = e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$, $\omega = c|\vec{k}|$.
Bewegung der Saite (eindimensional) für Anfangsbedingungen $\phi(x,0), \dot{\phi}(x,0)$ über Fourierentwicklung:

$$\begin{aligned}
\phi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk(\tilde{\phi}_+(k)e^{i(kx+\omega t)} + \tilde{\phi}_-(k)e^{i(kx-\omega t)}) \\
\phi(x,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk(\tilde{\phi}_+(k) + \tilde{\phi}_-(k))e^{ikx} \\
\dot{\phi}(x,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dkc|k|(\tilde{\phi}_+(k) + \tilde{\phi}_-(k))xe^{ikx} \\
\Rightarrow \tilde{\phi}_+(k) + \tilde{\phi}_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\phi(x,0)e^{-ikx} \\
\tilde{\phi}_+(k) - \tilde{\phi}_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ic|k|}\int_{-\infty}^{\infty} dx\dot{\phi}(x,0)e^{-ikx} \\
\Rightarrow \phi(x,t)
\end{aligned}$$

Kapitel 7

Der Hamilton-Formalismus

Rückblick Lagrange-Gleichungen (für holonome Zwangskräfte):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, L = T - V \tag{7.1}$$

Verallgemeinerter Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.2}$$

7.1 Legendre-Transformation

Übergang von Lagrange zum Hamilton-Formalismus durch Ersetzung der verallgemeinerten Geschwindigkeit durch den verallgemeinerten Impuls.

$$\{q_i, \dot{q}_i, t\} \rightarrow \{q_i, p_i, t\}$$

Beispiel

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2, p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} \Rightarrow h = \frac{p^2}{2m}$$

Wähle nun:.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x} + c)^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + c) = p \Rightarrow h = \frac{p^2}{2m}$$

$\Rightarrow$ Die Transformation ist nicht eindeutig umgekehrbar!
In der geometrischen Betrachtung ist p die Steigung des Graphen (der Funktion) $L(\dot{x})$.
Die Funktion $h(p)$ ist durch die Steigung $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ nicht eindeutig vorgegeben. Daher wird ein besseres Verfahren genutzt:

$$H(\dot{x}) = p\dot{x} - L(\dot{x}) = H(p)$$

Allgemeiner:

$$H(q,p,t) := \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t) \tag{7.3}$$

heißt Hamilton-Funktion.
H geht durch Legendre-Transformation aus L hervor. Falls H nicht explizit zeitabhängig, dann folgt aus (3.6.2):

$$\frac{d}{dt}H = 0$$

Beispiel

1.
$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \dot{x} = \frac{p}{m} \Rightarrow H = p\dot{x} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

2.
$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}+c)^2 \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} - c \Rightarrow H = p(\frac{p}{m} - c) - \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - cp$$

7.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Bilde aus (7.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k}(\sum_i p_i \dot{q}_i(q,p) - L(q,\dot{q},t)) = \dot{q}_k + \sum_i (p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k}) = \\
&= \dot{q}_k + \sum_i (p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\
\frac{\partial H}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k}(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)) = \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_i \underbrace{(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})}_{=0}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k
\end{aligned}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = 1,...,f \tag{7.4}$$

Bemerkungen

1. Gleichung (7.4) definiert Hamiltonsche Systeme.

2. System von $2f$ (gekoppelten) Differentialgleichungen 1. Ordnung, äquivalent zu f Lagrange Gleichungen (Differentialgleichungen 2. Ordnung).

3. Der Raum der $2f$ q_i und p_i heißt *Phasenraum*; die Dynamik des Systems ist eindeutig beschrieben durch Bahnen $\vec{\xi}(t) = (q_1(t), ..., q_f(t), p_1(t), ..., p_f(t))$ mit $2f$ Anfangswerten.

4. Bahnen im Phasenraum können sich nicht schneiden (im Gegensatz zu Bahnen im Konfigurationsraum $(q_1, ..., q_f)$).

Beispiel (1): Harmonischer Oszillator

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2, V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2 x$$

Phasenraum:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = E$$

Ellipsen für festes E.

Beispiel (2): Pendel

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \Rightarrow p_\varphi := p = ml^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow H = p\frac{p}{ml^2} - \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = E$$

Bei zeitunabhängigen Problemen ist $H = E$.

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Phasenraum:
Pendel kann durchschwingen, wenn die Trajektorie im Phasenraum über der Linie der Seperatrix angesetzt ist.

7.3 Erweitertes Hamiltonsches Prinzip

Aus Kapitel (3.5) (Variation der q_i entspricht δ):

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Variation der Phasenraumkoordinaten führt zum erweiterten Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H)}_{L} dt = 0$$

Mit Koordinatenvariationen:

$$q_i = q_i^{(0)} + \alpha \eta_i, p_i = p_i^{(0)} + \alpha \xi_i, \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\alpha}(\sum_i p_i \dot{q}_i - H) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i (\xi_i \dot{q}_i + p_i \dot{\eta}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\eta_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\xi_i) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i ((\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})\xi_i + \underbrace{\frac{d}{dt}(p_i, \eta_i)}_{\Rightarrow p_i \eta_i|_{t_1}^{t_2} = 0} - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})\eta_i) dt = \\ \delta S &= 0 \end{aligned}$$

Wie in Gleichung (7.4) folgt nun:

$$\Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

7.4 Poissonklammern

Definition 11

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{f} (\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}) = -\{g, f\}$$

heißt Poisson-Klammer.

Es gilt:

1. $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}$$

2. $$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

3. $$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Konstanten der Bewegung Falls gilt:

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \Leftrightarrow \{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\Rightarrow f(q, p)$ ist Erhaltungsgröße genau dann wenn $\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$.
$\Rightarrow$ Mit Hilfe der Poisson-Klammern läßt sich prüfen, ob eine Funktion f Erhaltungsgröße ist.

Beispiel

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \Rightarrow H = const.$$

Jacobi-Identität (ohne Beweis)

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Falls A, B Erhaltungsgrößen $\{H, A\} = \{H, B\} = 0$. $\Rightarrow \{H, \{A, B\}\} = 0 \Rightarrow$ $\{A, B\}$ ist auch Erhaltungsgröße.

7.5 Phasenraumflüsse: Liouville-Theorem

Zeitliche Entwicklung eines Volumens V im Phasenraum:

$$\vec{x} = (q_1, ..., q_f, p_1, ..., p_f)$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t, \vec{a})$$

$$\frac{d}{dt}V = \int_S \frac{d}{dt}\vec{x}d\vec{s} = \int_S \vec{f}d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla}\vec{f}d\vec{x} \tag{7.5}$$

1. Hamiltonsche Systeme

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial q_f}\right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{f} &= \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}V &= H \end{aligned}$$

Liouville-Theorem $\Rightarrow$ Das Volumen V eines beliebigen Gebietes im Phasenraum bleibt konstant. Phasenraum Trajektorien schneiden sich nicht.
$\Rightarrow$ Teilchen (Trajektorien) können das Volumen nicht verlassen.
$\Rightarrow$ Phasenraumdichte $D = \frac{dN}{dV} = const.$

$$\Rightarrow 0 = \frac{dD}{dt} = D, H + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial t} = -\{D, H\}$$

2. Dissipative Systeme (offen im Austausch mit Umgebung - Systeme mit Reibung)

Beispiel gedämpfter Oszillator

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \dot{q} = p$$

$$\dot{p} = -\gamma p - \omega_0^2 q$$

$$\vec{\nabla} \vec{f} = \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}(-\gamma p - \omega_0^2 q) = -\gamma$$

$$(7.5) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\gamma V$$

$\Rightarrow$ Volumen V nimmt expontentiell ab. Diese Bewegung läuft auf einem Attraktor (hier Fixpunkt) zu. Attraktoren müssen keine Fixpunkte sein, z.B. seltsame Attraktoren:
Selbstähnliche Gebilde mit komplitzierter geometrischer Struktur, gebrochener (fraktaler) Dimension D.

Beispiel getriebenes gedämpftes Pendel

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = A \cos(\omega t)$$

7.6 Poincaré-Schnitte

Visualisierung von Phasenraumdynamik. Bei Konservativen Systemen mit 2 Freiheitsgraden ergibt das einen 4 dimensionalen Phasenraum:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) = E \Rightarrow p_y = p_y(x, y, p_x, E)$$

$\Rightarrow$ 3 unabhängige Koordinaten.
Poincaré-Abbildung: $P_i \rightarrow P_{i+1}$-Diskretisierung der Dynamik.

Bewegungstypen im Phasenraum

1. Periodische Bewegung $\rightarrow$ Fixpunkte in Poincaré-Abbildung

2. Quasiperiodische Bewegung, z.B. bei 2 Freiheitsgraden: Oszillator mit inkommensurablen Frequenzen ω_1, ω_2:

$$V = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2), \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{k}{l}, k, l \in \mathbb{N}$$

   Bewegung auf Torus (Donut). Also ist eine quasi-periodische Bewegung nicht geschlossen.

3. Chaotische Bewegung
   Phasenraumfüllende, ergodische Bewegung: jede Trajektorie kommt jedem Phasenraumpunkt beliebig nahe.

7.7 Hamiltonsches Chaos

7.7.1 Vorbemerkungen

Beispiel Chaos beim Snookerspielen

- Deterministisches Chaos
  Bewegung unterliegt festen physikalischen Gesetzen (z.B. den Hamiltonschen Gleichungen), aber die Bewegung ist sensitiv von Anfangsbedingungen.
  $\Rightarrow$ praktisch nicht für beliebige Zeiten vorhersehbar.

- Chaos $\neq$ Zufall!