Theoretische Physik II - Elektrodynamik

Mitschrift der Vorlesung von
Professor Dr. John Schliemann
im Wintersemester 2008 / 09

Florian Rappl

26. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung: Einheiten

Die SI Einheiten m, kg und s haben im cgs System die Werte $100cm$, $1000g$ und $1s$. Die Einheiten Candela, Coulomb (Ampère), Kalvin und Mol sind im cgs System nicht vorhanden.
Die Abgeleiteten Einheiten N und J entsprechen im cgs System 10^5 dyn bzw. 10^7 erg. Eine neue physikalische Größe ist die Ladung.
Beobachtung: Ladungen stoßen sich ab oder ziehen sich an, je nach Vorzeichen (das durch diese Eigenschaft definiert ist).
Quantitativ: Coulombsches Gesetz von Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{1.1}$$

Einheit der Ladung q ist

$$\sqrt{dyn \cdot cm^2} = \sqrt{erg \cdot cm} = esu \tag{1.2}$$

Diese "electrostatic unit" ist die Einheit der Ladung im cgs System. Im SI System wird für die Ladung eine zusätzliche Einheit eingeführt: Dies führt notwendigerweise zur Einführung einer neuen Konstanten.

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Jm} \tag{1.4}$$

Coulomb C Einheit der Ladung im SI System.
ε_0: Influenzkonstante, Dielekrizitätszahl (Permezivität) des Vakuums. Wieso dieser Zahlenwert? Aufgrund der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{1.5}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Js^2}{C^2 m} \tag{1.6}$$

Induktionskonstante, Permeabilität des Vakuums mit $c = 299792458 \frac{m}{s}$ definiert mit (1.6):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \tag{1.7}$$

Beziehung zwischen *esu* und *C*:

$$F_{12} = \frac{q_1^{cgs} q_2^{cgs}}{r_{12}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1^{SI} q_2^{SI}}{r_{12}^2}$$

Nun betrachten wir: $r_{12} = 1cm, q_1^{cgs} = q_2^{cgs} = 1esu$

$$\Rightarrow \quad 1dyn = 10^{-5} \frac{kgm}{s^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1^{SI} q_2^{SI}}{10^{-4} m^2}$$

$$\Rightarrow \quad 10^{-9} Jm = \frac{c^2 \mu_0}{4\pi} (q_1^{SI} q_2^{SI})$$

$$\Rightarrow \quad 10^{-2} \frac{C^2}{c^2 \frac{s^2}{m^2}} = q_1^{SI} q_2^{SI}$$

$$\Rightarrow \quad q_1^{SI} = q_2^{SI} = \frac{1}{10c\frac{s}{m}} C$$

$$1esu = \frac{1/10c\frac{s}{m}}{C} = 1Fr$$

(nach Benjamin Franklin (1706-1790))

$$\frac{1}{10c\frac{s}{m}} C = \frac{3}{3 \cdot 10^9} C = 1StC$$

Während die Lorentzkraft im cgs System $\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{c} \times \vec{B})$ ist, schaut sie im SI System so aus: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ - in beiden Fällen ist $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte.

$$B^{cgs} = \frac{F}{q^{SI} v} = [\frac{dyn}{esu}] = [\frac{g\frac{cm}{s^2}}{esu}] = [\sqrt{\frac{J}{10m^3}}] = [1G]$$

durch $1J = 10^7 erg$ und $1cm = 10^{-2} m$ ergibt sich 1 Gauß, nach Carl Gauß (1777-1855).

$$B^{SI} = \frac{F}{q^{SI} v} = [\frac{N}{C\frac{m}{s}}] = [\frac{kg}{Cs}] = [1T]$$

benannt nach Nicola Tesla (1856-1943). 1 Tesla sind 10^4 Gauß. Weitere wichtige SI-Einheiten:

- $1A = \frac{C}{s}$ (Ampère, (1775-1836))
- $1V = \frac{J}{C}$ (Volta, (1745-1827))
- $1F = \frac{C}{V}$ (Faraday, (1791-1867))

Maxwell-Gleichungen nach James Clerk Maxwell (1831-1879). Im cgs System gilt:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\varrho \tag{1.8}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{1.9}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.10}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.11}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}) \tag{1.12}$$

Im SI System lauten diese Gleichungen so:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{1.13}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \tag{1.14}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.15}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{1.16}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{1.17}$$

ϱ-Ladungsdichte $\varrho = \frac{Q}{v}$ und
$\vec{j}$-Leiterstromdichte $j = \frac{Q}{S\cdot t}$, S-Querschnitt, t-Zeit

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} & - & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & - & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & - & \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\vec{A} = div\vec{A} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}, grad\vec{A} = \sum_{i=1}^{3}\hat{e}_i\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

Kapitel 2

Mathematische Techniken

2.1 Deltafunktion

$$\delta(x - x_0) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq x_0 \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \tag{2.2}$$

$$\varrho(\vec{r}) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) = q\delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

$$\int_V \varrho(\vec{r}) dxdydz = q \int_{-\infty}^{+\infty} dx\delta(x - x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy\delta(y - y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz\delta(z - z_0) = q$$

Herleitung der Deltafunktion Die δ-Funktion muss folgende Eigenschaften besitzen:

1. $$\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \tag{2.3}$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{2.4}$$

Näherung erfolgt über:

1. $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$ wobei gilt:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < -\varepsilon, x > \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & -\varepsilon < x < \varepsilon \end{cases} \tag{2.5}$$

   (a) $$x \neq 0, \varepsilon \to 0, \delta_\varepsilon(x) = 0 \tag{2.6}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx\frac{1}{2\varepsilon} = \frac{x}{2\varepsilon}|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 1 \tag{2.7}$$

2.

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \tag{2.8}$$

(a) $x \neq 0, \varepsilon \to 0, \delta_\varepsilon(x) = 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{(\frac{x}{\varepsilon})^2+1}\frac{1}{\varepsilon}x =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi}\arctan y|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

3. $g(x); \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = I$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon I}g(\frac{x}{\varepsilon}), \lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x) \tag{2.9}$$

Eigenschaften der Deltafunktion

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{2.10}$$

Beweis $x \neq 0, \delta(x) = 0 = \delta(-x)$

$$\delta(x-x_0)f(x) = \delta(x-x_0)f(x_0) \tag{2.11}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{2.12}$$

Beweis $x \neq 0, \delta(ax) = 0 = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{|a|}\delta(y) = \frac{1}{|a|}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_0), g(x_n) = 0 \tag{2.13}$$

Beweis $x \neq x_n \Rightarrow g(x) \neq 0 \Rightarrow \delta(g(x)) = 0 = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(g(x)) &= \sum_n \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} dx\delta(g(x)) = \\ &= \sum_n \int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} dx\delta(g'(x_n)(x-x_n)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_0)\end{aligned}$$

$$\delta'(x-x_0)f(x) = -f'(x_0)\delta(x-x_0) \tag{2.14}$$

Beweis $x \neq 0$ beide Seiten sind 0. Über partielles Integrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-x_0) f(x) &= \underbrace{\delta(x-x_0) f(x)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) \frac{df(x)}{dx} dx \\ &= -f'(x_0)\delta(x-x_0) \end{aligned}$$

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r_0}) = \gamma(u,v,w)\delta(u-u_0)\delta(v-v_0)\delta(w-w_0) \tag{2.15}$$

Wobei für die kartesischen Koordinaten gilt: $\gamma = 1$ bzw.:

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r_0}) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

Im Allgemeinen folgt (aus der Jacobi-Transformations-Matrix):

$$\gamma := \frac{1}{|J(u,v,w)|}, J := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

2.2 Integrale (über Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$)

2.2.1 Bogenintegrale (Physikalische Motivation)

Betrachte Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Definition 1

$$\frac{ds}{dt} = |\frac{d\vec{r}}{dt}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{2.17}$$

Beachte:

$$\frac{ds}{dt} \geq 0 \tag{2.18}$$

Definition 2 (Bogenlänge)

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} \tag{2.19}$$

Bogenlänge entlang Kurve zwischen $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t)$. Beachten $s(t_0) = 0$.
Da (2.18) kann jede Kurve durch Ihre Bogenlänge selbst reparametrisiert werden (sog. "natürliche Parametrisierung"). Dann gilt:

$$|\frac{d\vec{r}}{ds}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}| = 1 \tag{2.20}$$

Der Tangenteneinheitsvektor:

$$\vec{d\vec{r}ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{|\frac{d\vec{r}}{dt}|} \tag{2.21}$$

Bogen-(Linienintegrale) C Kurve in $\mathbb{R}^3$, Parametrisierung $\vec{r}(t), t \in [t_0, t_1], \phi(\vec{r})$ Skalares Feld.

Definition 3 (Bogenintegral über ϕ entlang C)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt|\frac{d\vec{r}}{dt}|\phi(\vec{r}(t)) =: \int_C ds\phi(\vec{r}) \tag{2.22}$$

Damit folgt aus (2.17):

$$ds = |\frac{d\vec{r}}{dt}|dt$$

Skalares Bogenintegral über Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{A}(\vec{r}(t)) := \int_C d\vec{r}\vec{A}(\vec{r}) \tag{2.23}$$

Diese zwei Typen von Bogenintegralen sind die für die wichtigsten. Es sind aber auch andere Typen möglich.

Vektorwertiges Integral über skalares Feld

$$\int_C d\vec{r}\phi(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt\frac{d\vec{r}}{dt}\phi(\vec{r}(t)) \tag{2.24}$$

Vektorwertige Bogenintegrale über Vektorfelder

1.
$$\int_C ds\vec{A}(\vec{r}) \tag{2.25}$$

2.
$$\int_C d\vec{r} \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{2.26}$$

2.2.2 Oberflächenintegrale

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Parametrisierung einer Oberfläche im $\mathbb{R}^3$, u, v durch Parameter:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \tag{2.28}$$

(Tangentialvektoren spannen Tangentialebene auf)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \tag{2.29}$$

(Normaleinheitsvektor, senkrecht zur Oberfläche)

Definition 4 (Flächeninhalt der Oberfläche)

$$s = \int\int dudv|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \tag{2.30}$$

Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Parametrisierung der Oberfläche. Skalares Oberflächenintegral über skalares Feld $\phi(\vec{r})$

$$\int\int dudv|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\phi(\vec{r}(u,v)) =: \int dS\phi(\vec{r}) \tag{2.31}$$

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|dudv \tag{2.32}$$

Skalares Oberflächenintegral über Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\int\int dudv(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\vec{A}(\vec{r}(u,v)) \quad =: \quad \int \vec{n}dS\vec{A}(\vec{r}) =: \tag{2.33}$$

$$=: \quad \int d\vec{S}\vec{A}(\vec{r}) \tag{2.34}$$

$$d\vec{S} \quad = \quad \vec{n}dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)dudv \tag{2.35}$$

Beachte: $d\vec{S}$ und $\vec{n}$ ändern ihr Vorzeichen bei Tauschung von u, v. Die Richtung von $\vec{n}$ (oder $d\vec{S}$) definiert die Orientierung der Oberfläche. Im Zusammenhang mit physikalischen Fragestellungen ist die geeignete Orientierung einer Oberfläche in der Regel klar.
Andere Typen von Oberflächenintegralen (analog zum Bogenintegral):

$$\int d\vec{S}\phi(\vec{r}) \tag{2.36}$$

$$\int dS\vec{A}(\vec{r}) \int d\vec{S} \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{2.37}$$

2.3 Vektoranalysis

2.3.1 Vektoren

Bezüglich dreier (z.B. kartesischer) Koordinatenrichtungen ist ein Vektor gegeben durch drei reelle Zahlen (a_1, a_2, a_3). Eine Rotation des Koordinatensystems oder Vektors selber muss Skalarprodukt invariant lassen.

$$\vec{a} \mapsto \vec{a}', \vec{b} \mapsto \vec{b}'$$

$$\vec{a}'\vec{b}' = \sum_{i=1}^{3} a_i' b_i' =: a_i' b_i' = a_i b_i = \vec{a}\vec{b}$$

(Einsteinsche Summenkonvention - über wiederholte Indizes wird summiert) Eine solche Transformation kann nur linear sein.

$$\vec{a}' = \Theta\vec{a} \tag{2.38}$$

$$a_i' = \Theta_{ij} a_j \tag{2.39}$$

Mit der $3x3$-Matrix Θ. Jeder nichtlineare oder konstante Term würde die Erhaltung von Längen $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}, \vec{a}$ beliebig verletzen.
Weitere Einschränkungen an Θ:

$$\vec{a}'\vec{b}' = a_i' b_i' = \Theta_{ij} a_j \Theta_{ik} b_k = (\Theta^T)_{ji} \Theta_{ik} a_j b_k = (\Theta^T \Theta)_{jk} a_j b_k = a_i b_i$$

für $\vec{a}, \vec{b}$ beliebig.

$$\Rightarrow (\Theta^T \Theta)_{jk} = \delta_{jk} \tag{2.40}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{2.41}$$

(sog. Kronecker-Delta)

$$\Theta^T \Theta = 1_n, \Theta^T = \Theta^{-1} \tag{2.42}$$

Somit folgt auch, dass das Inverse der Matrix immer vorhanden ist. Dies kann man leicht über die Determinante überprüfen.

$$\det(\Theta^T \Theta) = \det \theta^T \det \Theta = (\det \Theta)^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists \Theta^{-1}$$

Insbesondere folgt aus (2.40), dass alle Zeilenvektoren von Θ (oder äquivalent auch alle Spaltenvektoren) von Θ zueinander orthonomiert sind. Insgesamt $\sum_{i=1}^{3} i = \frac{1}{2} n(n+1)$. Daher hat eine orthogonale nxn-Matrix $n^2 = \frac{1}{2} n(n+1) \Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1)$ freie Parameter. Für $n = 3$ ergeben sich 3 Parameter die als Richtungen und Drehwinkel gewählt werden können.

Beispiel Drehung um die z-Achse (eines gegebenen Koordinatensystems)

$$\Theta := D_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

1. Drehung der Koordinatenachsen um Winkel φ bei festem Vektor $\vec{r}$ (passive Rotation).

2. Drehung des Vektors $\vec{r}$ um Winkel $-\varphi$ bei festen Koordinatenachsen (aktive Rotation).

$$D_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

$$D_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Definition 5 (Vektor) *Ein Vektor $\vec{a}$ ist bezüglich dreier gegebener kartesischer Achsen durch seine drei Komponenten a_1, a_2, a_3 charakterisiert und transformiert unter Drehungen Θ dieser drei Achsen als $\vec{a} \mapsto \vec{a}' = \Theta\vec{a}$ oder $a_i \mapsto a_i' = \Theta_{ij}a_j$.*

Definition 6 (Tensor) *Ein Tensor $A_{i_1,\ldots,i_n}$ n-ter Stufe ist ein Objekt mit n-Indizes, das unter Rotation wie folgt Transformiert.*

$$A_{i_1,\ldots,i_n} \mapsto A_{i_1,\ldots,i_n} = \Theta_{i_1 j_1} \ldots \Theta_{i_n j_n} A_{j_1,\ldots,j_n} \tag{2.46}$$

Beispiel

Tensor nullter Stufe Skalar, invariant unter allen Drehungen, z.B. Skalarprodukt zweier Vektoren.

Tensor erster Stufe Vektor

Tensor zweiter Stufe Matrix, z.B. Trägheitstensor.
Infinitesimale Rotation:

$$\Theta = 1 + \omega + o(\omega^2) \tag{2.47}$$

$$\omega \ll 1, \Theta^T = 1 + \omega^T + o(\omega^2) \tag{2.48}$$

$$\Theta^T\Theta = 1 + o(\omega^2) \Leftrightarrow \omega + \omega^T = 0 \tag{2.49}$$

$$\omega = -\omega^T \tag{2.50}$$

Somit ist ω eine antisymmetrische Matrix.

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\varphi_k \tag{2.52}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & (i,j,k), 2n : \sigma \\ -1, & (i,j,k), 2n-1 : \sigma \\ 0, & sonst \end{cases} \tag{2.53}$$

Total antisymmetrischer Einheitstensor, Levi-Cevitá-Symbol. Äquivalente Definition wäre:

$$\varepsilon_{123} = 1 \tag{2.54}$$

und ε_{ijk} antisymmetrisch unter allen Transpositionen von (i, j, k). Beachte: ε_{ijk} ist nur dann, von 0 verschieben, wenn

$$i \neq j \neq k \neq i \tag{2.55}$$

Jeder total antisymmetrische Tensor 3. Stufe in der Dimension hat nur eine unabhängige Komponente, die im Fall des Einheitstensors gleich 1 gewählt wird.

$$\varepsilon_{123} = 1 \Rightarrow \varepsilon_{132} = -1, \varepsilon_{231} = 1, ...$$

Theorem 1 *Der total antisymmetrische Einheitstensors ist in jedem kartesischen Koordinatensystem identisch*

$$\varepsilon'_{ijk} = \Theta_{il}\Theta_{jm}\Theta_{kn}\varepsilon_{lmn} \tag{2.56}$$

Beide Seiten total antisymmetrisch unter Permutation von i, j, k:

$$\Rightarrow \varepsilon'_{ijk} = C(\Theta)\varepsilon_{ijk} \tag{2.57}$$

Der Faktor $C(\Theta)$ ist eine Funktion der Matrix Θ mit den Eigenschaften

1. C ist linear in allen Spalten und Zeilen von Θ
2. C ist antisymmetrisch unter paarweiser Vertauschung von Spalten (oder Zeilen)
3. $C(1) = 1$

$$C(\Theta) = \det\Theta = \pm 1 \tag{2.58}$$

Falls $\det\Theta = 1 \Leftrightarrow$ Eigentliche Drehungen, drehen rechts-(links-) händige Systeme in rechts-(links-) System. Falls $\det\Theta = -1 \Leftrightarrow \Theta$ enthält Spiegelung $\Rightarrow$ ändert Händigkeit des Koordinatensystems.
Die orthogonalen nxn-Matrizen bilden die orthogonale Gruppe $O(n)$. Die orthogonalen nxn-Matrizen mit positiver Determinante bilden die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n) \subseteq O(n)$.

$$(\Theta_1\Theta_2)^T = \Theta_1^T\Theta_2^T = \Theta_2^{-1}\Theta_1^{-1} = (\Theta_1\Theta_2)^{-1}$$

Somit ist die aus einem Matrixprodukt orthogonaler Matrizen entstandene Matrix wieder orthogonal.
Ergebnis: ε_{ijk} ist invariant unter allen eigentlichen Drehungen $\Theta \in SO(3)$. Einige nützliche Formeln:

1. Permutationen von $(1,2,3)$ - alle Ergeben +1:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \Leftrightarrow 3! = 6 \tag{2.59}$$

2. Hier folgt:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jkl} = 2\delta_{ij} \tag{2.60}$$

Beweis $a_{ij} = a\delta_{ij} \Rightarrow a_{ii} = a\delta ii = 3a = 6 \Rightarrow a = 2$

3. Hier folgt:

$$\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \tag{2.61}$$

Wegen Symmetrie und Invarianz unter Drehungen muss die linke Seite von folgender Form sein:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} &= b(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = \\
\Rightarrow 2\delta_{ij} &= \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{ijm} = b(\delta_{ik}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jk}) = \\
&= b(3\delta_{ij} - \delta_{ik}) = 2b\delta_{ik} \Rightarrow b = 1
\end{aligned}$$

Definition 7 (Vektorprodukt) *Das Produkt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$:*

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{2.62}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Behauptung $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor.

Beweis

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_i &= \varepsilon_{ijk}\Theta_{jl}a_l\Theta_{km}b_m = \varepsilon_{njk}(\Theta\Theta^T)_{ni}\Theta_{jl}\Theta_{km}a_lb_m = \\ &= (\Theta^T)_{oi}\varepsilon_{njk}\Theta_{no}\Theta_{jl}\Theta_{km}a_lb_m = \Theta_{io}\varepsilon_{olm}a_lb_m =\end{aligned}$$

$\Theta_{io}(\vec{a} \times \vec{b})_o = \Theta_{ij}(\vec{a} \times \vec{b})_j$

Weiteres Beispiel Der Nabla Operator $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) =: \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ ist ein Vektor.

$$\nabla' = \Theta\nabla \tag{2.64}$$

Ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ transformiert unter Rotation wie folgt:

$$\vec{A}(\vec{r}) \mapsto \vec{A}'(\vec{r}') = \Theta\vec{A}(\vec{r}), \vec{r}' = \Theta\vec{r} \tag{2.65}$$

$$\nabla'\vec{A}'(\vec{r}') = (\Theta\nabla)(\Theta\vec{A}(\vec{r})) = \nabla\vec{A}(\vec{r}) \tag{2.66}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalar.

$$\nabla' \times \vec{A}'(\vec{r}') = \Theta(\nabla \times \vec{A}(\vec{r})) \tag{2.67}$$

$$\nabla'\varphi'(\vec{r}') = \Theta(\nabla\varphi(\vec{r})), \varphi(\vec{r}) \mapsto \varphi'(\vec{r}') = \varphi(\vec{r}) \tag{2.68}$$

Rotation und Gradient sind Vektoren.

2.3.2 Mehr über Vektorfelder

- Gradient eines skalaren Feldes $\varphi(\vec{r})$

$$\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = \nabla\varphi \Leftrightarrow d\varphi = (\nabla\varphi)d\vec{r} = (\frac{\partial\varphi}{\partial x})dx + ... + (\frac{\partial\varphi}{\partial z})dz \tag{2.69}$$

  $\Rightarrow \nabla\varphi$ ist immer orthogonal zum Tangentenvektor an der Äquipotentiallinie im jeweiligen Punkt.

- Rotation eines Vektorfeldes, z.B. das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ in einem Fluid (Hydrodynamik):

$$d\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x & \partial_z v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y & \partial_z v_y \\ \partial_x v_z & \partial_y v_z & \partial_z v_z \end{pmatrix}}_{=:V(\vec{v})} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

$$\partial_j v_i := \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, i, j \in \{1,2,3\}$$

$$V = \underbrace{\frac{1}{2}(V + V^T)}_{=:S(\vec{v})} + \underbrace{\frac{1}{2}(V - V^T)}_{=:A(\vec{v})} \tag{2.71}$$

Wobei S eine symmetrische Matrix und A eine antisymmetrische Matrix darstellt.

$$d\vec{v} = S(\vec{v})d\vec{r} + A(\vec{v})d\vec{r} \tag{2.72}$$

Der symmetrische Anteil beschreibt den Fluss von Teilchen entland der Hauptachse von S. Der antisymmetrische Anteil beschreibt die Rotation des Fluids.

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j) = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{2.73}$$

$$dv_i = S_{ij}dr_j - \varepsilon_{ijk}\omega_k dr_j \tag{2.74}$$

$$-\varepsilon_{ijk}\omega_k dr_j = (\vec{\omega} \times d\vec{r})_i \tag{2.75}$$

Die lokale Rotation.

- Divergenz des Vektorfeldes. Betrachten Änderung von Ladungsmenge (oder Teilchenzahl) durch Fließen von Ladungen (Teilchen).

$$-\dot{\varrho} = \frac{dydzdj_x + dzdxdj_y + dxdzdj_z}{dxdydz}, dj_i = j_i(r_i + dr_i) - j_i(r_i) \tag{2.76}$$

$$\Rightarrow -\dot{\varrho} = \nabla\vec{j} \tag{2.77}$$

$$-\dot{\varrho} = \mathtt{tr}(S(\vec{j})) \tag{2.78}$$

$$\dot{\varrho} + \nabla\vec{j} = 0 \tag{2.79}$$

Kontinuitätsgleichung, beschreibt die Erhaltung von Ladungen (Teilchen).

Einige nützliche Formeln

$$\nabla(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{2.80}$$
$$\nabla\times(\nabla\varphi) = 0 \tag{2.81}$$
$$\nabla(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1\nabla\varphi_2 + \varphi_2\nabla\varphi_1 \tag{2.82}$$
$$\nabla(\varphi\vec{A}) = \varphi\nabla\vec{A} + \vec{A}\nabla\varphi \tag{2.83}$$
$$\nabla\times(\varphi\vec{A}) = \varphi(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\times(\nabla\varphi) \tag{2.84}$$
$$\nabla(\vec{A}\vec{B}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{B}\nabla)\vec{A} + (\vec{A}\nabla)\vec{B} \tag{2.85}$$
$$\nabla(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}(\nabla\times\vec{B}) \tag{2.86}$$
$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\vec{A}) + (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B} \tag{2.87}$$

Für die ersten beiden Beweise muss gelten, dass A oder φ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann sieht man leicht, dass die Konstraktion $S_{ij}A_{ji}$ einer symmetrischen Matrix S und einer antisymmetrischen Matrix A verschwindet:

$$S_{ij}A_{ji} = -S_{ji}Aij = -S_{ij}A_{ji} \Rightarrow S_{ij}A_{ji} = 0 \Rightarrow \nabla(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

- Nabla multipliziert mit Nabla.

$$\nabla(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = \partial_i\partial_i\varphi \tag{2.88}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \partial_i\partial_i =: \nabla^2 \tag{2.89}$$

  Der sogenannte LaPlace-Operator.

- LaPlace-Operator:

$$(\nabla\times(\nabla\times\vec{A}))_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\partial_i\partial_l A_m = \partial_i\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j = \nabla(\nabla\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{2.90}$$

Krummlinige orthogonale Koordinaten Betrachte neue Koordinaten u, v, w, die Raumpunkte parametrisieren mögen. $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$, so dass folgt:

$$\vec{e}_u = \frac{1}{n_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \vec{e}_v = \frac{1}{n_v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}, \vec{e}_w = \frac{1}{n_w}\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}$$

Wobei $n_u = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}|, n_v = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|, n_w = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}|$ ist. $\Rightarrow \vec{e}_v, \vec{e}_w, \vec{e}_u$ sind wechselseitig orthogonal. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass

$$\vec{e}_v = \vec{e}_w \times \vec{e}_u \tag{2.91}$$

Einfachstes Beispiel: Kartesische Koordinaten x, y, z:

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0), \vec{e}_y = (0, 1, 0), \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

Im Allgemeinen jedoch werden die Richtungen $\vec{e}_v, \vec{e}_u, \vec{e}_w$ vom Ort abhängen.

Beispiel Kugelkoordinaten $\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta$

Vektorkomponenten

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z && (2.92) \\ &= \vec{e}_v A_v + \vec{e}_u A_u + \vec{e}_w A_w && (2.93) \\ A_u &= \vec{e}_u \vec{A} = \vec{e}_u \vec{e}_x A_x + \vec{e}_u \vec{e}_y A_y + \vec{e}_u \vec{e}_z A_z && (2.94) \\ \vec{A} &= \vec{e}_u(\vec{e}_u\vec{A}) + \vec{e}_v(\vec{e}_v\vec{A}) + \vec{e}_w(\vec{e}_w\vec{A}) && (2.95) \\ &\Rightarrow \sum_{\alpha\in\{u,v,w\}} (\vec{e}_\alpha)_i (\vec{e}_\alpha)_j = \delta_{ij} && (2.96) \end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte Vollständigkeitsrelation.

Nabla in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \nabla &= \vec{e}_r(\nabla)_r + \vec{e}_\vartheta(\nabla)_\vartheta + \vec{e}_\varphi(\nabla)_\varphi \\ (\nabla)_r &= \cos\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

Dann folgt mit Benutzung der Kettenregel:

$$\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{2.97}$$

LaPlace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{2.98}$$

Beachte: Sphärische Richtungsvektoren sind ortsabhängig. Mehr über den LaPlace-Operator am Beispiel des Coulomb'schen Gesetzes.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla\frac{1}{r} \tag{2.99}$$

Betrachte

$$\nabla(\nabla\frac{1}{r}) = \Delta\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}) = 0, r \neq 0 \tag{2.100}$$

Was passiert für $r = 0$? Regulierung von $\frac{1}{r}$. Beispiel:

$$\chi(r,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}} \tag{2.101}$$

$$\chi(0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon > 0, \lim_{\varepsilon\to 0+}\chi(r,\varepsilon) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned}
\int d^3r\Delta\chi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\infty} drr^2\Delta\chi = 4\pi\int_0^{\infty} drr^2\Delta\chi = \\
&= 4\pi\int_0^{\infty} dr\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\chi)}_{r\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\chi} = 4\pi([r\frac{\partial}{\partial r}(r\chi)]_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^{\infty} dr\frac{\partial}{\partial r}(r\chi)) \\
&= 4\pi[r\frac{\partial}{\partial r}(r\chi) - r\chi]_{r=0}^{r=\infty} = 4\pi[r^2\frac{\partial}{\partial r}\chi]_0^{\infty}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4\pi\lim_{r\to\infty} r^2\frac{\partial}{\partial r}\chi = -4\pi \tag{2.102}$$

Zusammengefasst:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\frac{1}{r} = 0, r\neq 0\\ \int d^3r\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\end{array}\right\}\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{2.103}$$

Beachte: Zur Herleitung von (2.102) war die spezielle Gestalt der Regulierung χ unerheblich, gebraucht wurde nur die Eigenschaft $\lim_{r\to\infty} r^2\frac{\partial}{\partial r}\chi = -1$. Manchmal nützlich: Radialanteil des LaPlace-Operators:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r$$

Ergebnis: Die Funktion $-\frac{1}{4\pi r}$ ist die sogenannte Green'sche Funktion (nach George Green, 1793-1841) des LaPlace-Operators und erfüllt

$$\Delta\frac{-1}{4\pi r} = \delta(\vec{r}) \tag{2.104}$$

Allgemein: Es sei D Differentialoperator bezüglich unabhängig Variable $x_1, ..., x_n$ (Beispiel: $D = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$). Eine Green'sche Funktion G ist jede Funktion mit der Eigenschaft

$$DG(x_1, ..., x_n) = \delta(x_1)\ldots\delta(x_n) \tag{2.105}$$

Green'sche Funktionen sind nützlich zum Lösen inhomogenen Differentialgleichungen der Form

$$Df(x_1, ..., x_n) = y(x_1, ..., x_n) \tag{2.106}$$

Lösung:

$$f(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_n [G(x_1 - x'_1, ..., x_n - x'_n) y(x'_1, ..., x'_n)] \tag{2.107}$$

Beweis

$$\begin{aligned} Df(x_1, ..., x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} [G(x_1 - x'_1, ..., x_n - x'_n) y(x'_1, ..., x'_n)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) y(x'_1, ..., x'_n)] = \\ &= y(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Die Lösung (2.107) ist nicht eindeutig, da Lösungen der homogenen Gleichung

$$Df_0(x_1, ..., x_n) = 0 \tag{2.108}$$

addiert werden können. Ebenso ist die Green'sche Funktion nicht eindeutig bestimmt, sondern nur eindeutig bis auf homogene Lösungen

$$D(G + f_0) = DG = \delta(x_1) \dots \delta(x_n) \tag{2.109}$$

Diese Freiheit in der Green'sche Funktion kann genutzt werden, um Anfangs- und Randbedingungen zu implementieren.
Die Differenz zweier Green'schen FUnktionen ist immer eine Lösung der homogenen Gleichung

$$D(G_1 - G_2) = DG_1 - DG_2 = 0 \tag{2.110}$$

Die Green'sche Funktion des LaPlace-Operators ist nützlich zur Lösung der Poisson-Gleichung (Simon-Perus Poison, 1781-1840).

$$\Delta f(\vec{r}) = y(\vec{r}) \tag{2.111}$$

Beispiel aus der Mechanik: Harmonischer Oszillator

$$D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega \tag{2.112}$$

$$Dx(t) = y(t), y = \frac{1}{m} F(t) \tag{2.113}$$

Green'sche Funktionen:

$$G^R(t) = \Theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \quad (2.114)$$

$$G^A(t) = -\Theta(-t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \quad (2.115)$$

Wobei G^R die retardierte und G^A die avancierte Green'sche Funktion beschreiben.

$$DG^{R,A}(t) = \delta(t) \quad (2.116)$$

Beweis

$$\begin{aligned} DG^{R,A}(t) &= \underbrace{\dot{\delta}(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)}_{-\delta(t)\cos(\omega t)} + 2\delta(t)\cos(\omega t) \mp \Theta(\pm t)\sin(\omega t)\omega \pm \Theta(\pm t)\sin(\omega t)\omega \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^{R,A}(t-t')\frac{1-m}{F}(t') \quad (2.117)$$

$G^R(t-t') = 0, t < t'$. Retardierte Lösung benutzt nur $F(t')$ mit $t > t'$, das heißt t' liegt in der Vergangenheit von t. $G^A(t-t') = 0, t > t'$ benutzt nur $F(t')$ mit $t' > t$, das heißt t' liegt in der Zukunft von t!

2.3.3 Integralsätze

1. **Gauß'scher Satz**

$$\int_V d^3r\nabla\vec{A} = \int_{\partial V} d\vec{S}\vec{A} \quad (2.118)$$

mit ∂V als Rand des Volumens V.
Beweisidee Betrachte Quaderförmiges Integrationsvolumen

$$\begin{aligned} \int_V d^3r\nabla\vec{A} &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \\ &= \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz(A_x(x_1,y,z) - A_x(x_0,y,z)) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{z_0}^{z_1} dz(A_y(x,y_1,z) - A_y(x,y_0,z)) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy(A_z(x,y,z_1) - A_z(x,y,z_0)) = \\ &= \int_{\partial V} d\vec{S}\vec{A} \end{aligned}$$

Nun fülle beliebiges Integrationsvolumen mit infinitesimalen quaderförmigen Volumina.
Beispiel Kontinuitätsgleichung (2.79) $\dot{\varrho} + \nabla \vec{j} = 0$.

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt} \int_V d^3 r \varrho = - \int_V d^3 r \nabla \vec{j} = - \int_{\partial V} d\vec{S} \vec{j} \tag{2.119}$$

Die Änderung der Ladung nach der Zeit ist gleich dem Fluss durch den Rand des Volumens V. In diesem Sinne kann der Gaußsche Integralsatz als physikalische Aussage verstanden werden.

2. **Stokes**

$$\int_S d\vec{S}(\nabla \times \vec{A}) = \oint_{\partial S} d\vec{r}\vec{A} \tag{2.120}$$

Mit dem Rand der Fläche ∂S und dem Bogenintegral über das geschlossene Volumen, benannt nach George Stokes (1819-1903). Orientierung der Fläche, das heißt Richtung des Normalenvektors relativ zu $\partial\vec{S}$ ist wichtig.
Beweisidee Betrachte flaches Rechteck in der xy-Ebene, also mit $z = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_S d\vec{s}(\nabla \times \vec{A}) &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) = \\
&= \int_{y_0}^{y_1} dy (A_y(x_1, y) - A_y(x_0, y)) - \int_{x_0}^{x_1} dx (A_x(x, y_1) - A_x(x, y_0)) = \\
&= \int_{\partial S} d\vec{r}\vec{A}
\end{aligned}$$

Nun fülle beliebige Oberfläche S mit infinitesimalen flachen Rechtecken.
Beispiel Integrale Form der Maxwellgleichungen

$$\int_{\partial V} d\vec{s}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 V \varrho(\vec{r}) \tag{2.121}$$

$$\int_{\partial V} d\vec{s}\vec{B} = 0 \tag{2.122}$$

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}\vec{E} = - \int_S d\vec{s}\dot{\vec{B}} \tag{2.123}$$

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_S d\vec{s}\vec{j} + \frac{1}{c^2} \int_S d\vec{s}\dot{\vec{E}} \tag{2.124}$$

Beachte: Die differentiellen Maxwell-Gleichungen (1.13)-(1.16) enthalten mehr Informationen als die obigen nichtlokalen Beziehungen. Da die Volumina und Oberflächen aber beliebig sind kann man die lokalen

Maxwell-Gleichungen durch Betrachten infinitesimaler Integrationsbereiche zurückgewinnen.

$$\nabla\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_{\partial V} d\vec{s}\vec{E} \tag{2.125}$$

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\int_{\partial S} d\vec{r}\vec{E} \tag{2.126}$$

$\vec{r}$ immer enthalten in V bzw. S.

2.3.4 Potentiale

Skalarpotentiale

Definition 8 *Ein Unterraum Volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt einfach zusammenhängend, wenn alle geschlossenen Kurven stetig ineinander überführt werden können, ohne V zu verlassen.*

Nun sei $\vec{E}$ ein Vektorfeld mit $\nabla\times\vec{E} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich (Beispiel: Elektrostatik, $\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} = 0$). Dann gibt es einen skalares Potential $\phi(\vec{r})$ mit

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{2.127}$$

Das Minuszeichen ist Konvention. Bezüglich eines fest gewählten Koordinatenursprungs O ist $\phi(\vec{r})$ gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = -\int_C d\vec{r}\vec{E}(\vec{r}) \tag{2.128}$$

dabei ist C eine beliebige Kurve, die O und $\vec{r}$ verbindet. Diese Konstruktion ist unabhängig von der Kurve C. Betrachten dazu $\phi'(\vec{r}) = -\int_{C'} d\vec{r}'\vec{E}(\vec{r}')$.

$$\phi'(\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = -\oint_{C^{-1}C'} d\vec{r}'\vec{E}(\vec{r}') = -\int_S d\vec{s}(\nabla\times\vec{E}) = 0$$

Beweis von (2.127), (2.128) Da $\phi(\vec{r})$ nach Konstruktion rotationssymmetrisch ist, wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vec{r} = (x, 0, 0)$ und C als Gerade zwischen O und $\vec{r}$.

$$\phi(\vec{r}) = -\int_0^x dx' E_x(\vec{r}') \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = -E_x$$

Für allgemeine Richtung: $\nabla\phi = -\vec{E}$.
Die Maxwell-Gleichungen: $\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$.

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\phi) = \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \tag{2.129}$$

Poisson-Gleichung für skalares elektrostatisches Potential ϕ. Die Lösung geschieht mittels der Greenschen Funktion.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.130}$$

Beispiel Punktladung $\varrho(\vec{r}) = q_1\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$.

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_{12} = -q_2(\nabla\phi(\vec{r}))_{\vec{r}=\vec{r}_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}, \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Coloumbsches Gesetz folgt aus Maxwellgleichung:

$$\nabla\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

Vektorpotential Es sei $\vec{B}$ ein Vektorfeld mit $\nabla\vec{B} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich. Dann existiert ein Vektorfeld $\vec{A}$ mit

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.131}$$

$\vec{A}$ dem Vektorpotential von $\vec{A}$. Explizit bedeutet das:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\int_0^y dy' B_z(x, y', z) \\ \int_0^x dx' B_z(x', y, z) \\ \int_0^y dy'(B_x(x, y', z) + B_x(0, y', z)) - \int_0^x dx'(B_y(x', y, z) + B_y(x', 0, z)) \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned} 2(\nabla \times A)_x &= 2[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}] = B_x(x, y, z) + B_x(0, y, z) - \int_0^x dx' \frac{\partial B_y(x', y, z)}{\partial y} \\ &- \int_0^x dx' \frac{\partial B_z(x', y, z)}{\partial z} = B_x(x, y, z) + B_x(0, y, z) + \int_0^x dx' \frac{\partial B_x(x', y, z)}{\partial x'} = \\ &= B_x(x, y, z) + B_x(0, y, z) + B_x(x, y, z) - B_x(0, y, z) = 2B_x(x, y, z) \end{aligned}$$

Ist $\vec{A}$ eindeutig?

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}', \nabla \times (\vec{A} - \vec{A}') = 0$$

$$\vec{A} - \vec{A}' = \nabla\Omega, \vec{A} = \vec{A}' + \nabla\Omega \tag{2.133}$$

Das Vektorpotential ist nicht eindeutig sondern nur bis auf den Gradienten eines beliebigen Skalarfeldes bestimmt. Diese Freiheit kann man dazu nutzen weitere Bedingungen an $\vec{A}$ zu stellen, wie z.B.

$$\nabla\vec{A} = 0 \tag{2.134}$$

(sogenannte Coloumb-Eichung)

$$0 = \nabla\vec{A} = \nabla(\vec{A}' + \nabla\Omega) = \nabla\vec{A}' + \Delta\Omega$$

$$\Delta\Omega = -\nabla\vec{A}' \tag{2.135}$$

Beispiel für Coloumb-Eichung: Magnetostatik

$$\dot{\vec{E}} = 0, \nabla\vec{B} = 0, \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla\vec{A}}_{0}) - \Delta\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$$

$$\Delta\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \tag{2.136}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int d\vec{r}'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.137}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\nabla\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \\
&= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\int d^3r'[\nabla'(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) - \frac{\nabla'\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}] = \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\nabla'\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned}$$

Mit (2.79) $\Rightarrow \nabla'\vec{j}(\vec{r}') + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$.

$$\nabla\vec{A} = \frac{-\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\dot{\varrho}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0$$

$$\nabla\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \nabla \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \\
&= \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
\nabla' \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}|} &= \frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.138}$$

Biot-Savat Gesetz $\rightsquigarrow$ Coloumb-Gesetz der Magnetostatik

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{2.139}$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.79) folgt aus der Maxwell-Gleichung:
Aus (1.13) folgt $\nabla\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ (Gaußsche Gesetz für den elektrischen Fluss). Mit (1.16) $\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$ (Ampère-Maxwell Gesetz) folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla(\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}(\nabla\vec{j} + \dot{\varrho}) = 0 \\
&\Rightarrow \nabla\vec{j} + \dot{\varrho} = 0
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$ den Maxwellschen Verschiebungsstrom. (1.14) $\nabla\vec{B} = 0$ ist das Gaußsche Gesetz für den magnetischen Fluss (0 da es keine magnetischen Monopole gibt). (1.15) $\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ ist das Faraday-Henry Gestz (der Induktion). Damit folgt:

$$0 = \nabla \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}})$$

Zur Erinnerung

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists\phi : \vec{E} = -\nabla\phi \tag{2.140}$$

$$\nabla \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \Rightarrow \exists\phi : \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\nabla\phi$$

Also ist $\vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}$.

Zusammenfassung Für beliebige elektrische und magnetische $\vec{E}, \vec{B}$ (die die Maxwell-Gleichungen erfüllen) gibt es ein Skalarpotential ϕ und ein Vektorpotential $\vec{A}$, so dass

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.141}$$

und

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}} \tag{2.142}$$

Diese Gleichungen sind invariant unter der folgenden Transformation

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda, \phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{2.143}$$

$\Lambda(\vec{r}, t)$ ist eine beliebige Funktion. Diese Freiheit kann verwendet werden, um bestimmte Bedingungen an $\vec{A}$ und ϕ zu stellen (Eichungen).

Theorem 2 (Helmholtz) *Sei $\vec{F}$ beliebig, dann gilt:*

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} + \nabla\phi \tag{2.144}$$

Beweis Mit $\nabla\vec{F} = \Delta\phi$ folgt:

$$\phi = \frac{-1}{4\pi} \int d^3r \frac{\nabla F(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.145}$$

Betrachte nun $\vec{F}' = \vec{F} - \nabla\phi$, $\nabla\vec{F}' = \nabla\vec{F} - \Delta\phi = 0 \Rightarrow \Delta\vec{A} = -\nabla \times \vec{F}$.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla \times \vec{F}(\vec{r}, t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{2.146}$$

2.4 Fourierentwicklung und Fouriertransformation

Einführung in die grundlegenden Konzepte und Techniken - ohne mathematische Strenge.

2.4.1 Fourierentwicklung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x)$ eine komplexwertige Funktion einer reellen Variable mit Periodizität L, $f(x + L) = f(x)$.
Die Menge aller solcher Funktionen bilden einen Vektorraum V (im Allgemeinen mathematischen Sinne), mit dem Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, (g, f) \mapsto \frac{1}{L} \int_0^L dx g^*(x) f(x) \tag{2.147}$$

Wobei mit $*$ das komplexkonjugierte gemeint ist. Insbesondere ist $\langle g, f\rangle^* = \langle f, g\rangle, \langle \alpha f, \beta g\rangle = \alpha^*\beta\langle g, f\rangle$. Die Basis von V ist:

$$g_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{L}nx}, n \in \mathbb{Z} \tag{2.148}$$

Jede periodische Funktion $f \in V$ kann nach den Funktionen $g_n(x)$ entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n g_n(x) \tag{2.149}$$

$$c_n = \langle g_n, f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} f(x) \tag{2.150}$$

Bemerkung Mit den Fourierkoeffizienten

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} f(x) = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} dx e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} f(x)$$

für ein beliebiges a (Grund: L Periodizität).
Zur Fourierentwicklung (Fourierreihe):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle g_n, f \rangle g_n(x) \tag{2.151}$$

Weitere Notationen der Koeffizienten:

$$a_n := c_n + c_{-n} = \frac{2}{L} \int_0^L dx \cos(\frac{2\pi}{L} nx) f(x), b_n := \frac{1}{i}(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(\frac{2\pi}{L} nx) f(x) \tag{2.152}$$

Einfache Eigenschaften

$$\begin{aligned} f(x)\texttt{reell} &\Leftrightarrow c_n^* = c_{-n} \\ f(x) = f(-x) &\Leftrightarrow b_n = 0 \\ f(x) = -f(-x) &\Leftrightarrow a_n = 0 \end{aligned} \tag{2.153}$$

Orthonormiertheit der Basisfunktionen:

$$\langle g_n, g_{n'} \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi}{L}(n'-n)x} = \delta_{n,n'} \tag{2.154}$$

Damit folgt das Parsevalsche Theorem:

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, g_n \rangle \langle g_{n'}, f \rangle \langle g_n, g_{n'} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, g_n \rangle \langle g_n, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 \tag{2.155}$$

Beispiel Periodische δ-Funktion:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 + nL), 0 \le x_0 \le L && (2.156)\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} f(x) = \frac{e^{-i\frac{2\pi}{L}nx_0}}{L} && (2.157)\\
\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 + nL) &= \frac{1}{L}\sum e^{i\frac{2\pi}{L}n(x-x')} = && (2.158)\\
&= \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(x) g_n^*(x') && (2.159)
\end{aligned}
$$

Dies ergibt die sogenannte Vollständigkeitsrelation (siehe (2.96))!

Weiteres Beispiel Periodische Stufenfunktion

$$
c_n = \frac{1}{L}\int_0^a dx e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} = \begin{cases} \frac{a}{L}, & n = 0 \\ \frac{i}{2\pi}(e^{i\frac{2\pi}{L}na} - 1), & n \neq 0 \end{cases} \tag{2.160}
$$

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

2.4.2 Fouriertransformierte

Konzept: Bette Funktion, die von physikalischen Interesse ist, in eine Funktion hinreichend großer Periodizitätslänge (Im obigen Beispiel: $a \ll L$).

$$
Lc_n = \int_0^L dx f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}
$$

Hängt immer Schwächen von n ab, je größer L wird.

Beispiel Stufenfunktionen (siehe (2.160)).

$$
c_n = \frac{a}{L} + O(n\frac{a^2}{L^2}) \tag{2.161}
$$

Dann kann die Summe in

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L}(Lc_n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx} \tag{2.162}
$$

durch ein Integral approximiert werden,, also $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} dn$.
Neue Integrationsvariable $\frac{2\pi}{L} n = k, Lc_n = \tilde{f}(k)$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \tag{2.163}$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \tag{2.164}$$

Fouriertransformierte von $f(x)$.

Stufenfunktion

$$f(x) = \Theta(x) - \Theta(x-a) \tag{2.165}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^a dx e^{-ikx} = \frac{i}{k}(e^{-ika} - 1) = \\ &= \frac{e^{-\frac{i}{2}ka}}{k} 2 \sin(\frac{1}{2}ka) \end{aligned} \tag{2.166}$$

(Vergleiche (2.160))

Einfache Eigenschaften

$$f(x)\texttt{reell} \Leftrightarrow \tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k) \tag{2.167}$$

$$f(x) = \pm f(-x) \Leftrightarrow \tilde{f}(-k) = \pm \hat{f}(k) \tag{2.168}$$

(Re-)definition des Skalarproduktes:

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx g^*(x) f(x) \tag{2.169}$$

Basis des Vektorraums:

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{R} \tag{2.170}$$

Orthonormiertheit:

$$\langle g_k, g_{k'} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} = \delta(k - k') \tag{2.171}$$

Beweis

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \mapsto \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x-\varepsilon(x)}}_{I_\varepsilon(k'-k)}, \varepsilon \to 0+$$

Damit folgt:

$$I_\varepsilon(a) = \Re\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx e^{(iq-\varepsilon)x}\} = \Re\{\frac{1}{\pi}\frac{-1}{iq-\varepsilon}\} = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2} = \delta_\varepsilon(q)$$

(Vergleiche mit (2.8)!)

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx g_k^*(x) f(x) = \sqrt{2\pi}\langle g_k, f\rangle \tag{2.172}$$

Bemerkung Die Vergabe von Normierungsfaktoren wie $\frac{1}{2\pi}$ oder $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist Konvention und wird verschieden gehandhabt. Dergleichen für Faktoren $\frac{1}{L}, L, ...$ bei Fourierentwicklung. Mit (2.163) folgt:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle g_k, f\rangle g_k(x) \tag{2.173}$$

Vollständigkeitsrelation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk g_k(x) g_k^*(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} = \delta(x-x') \tag{2.174}$$

Parsevalsches Theorem:

$$\langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\langle g_k, f\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \tag{2.175}$$

Raumzeitliche Fouriertransformation:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k d\omega \vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r}-wt)} \tag{2.176}$$

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{k}, \omega) = \int d^3r dt \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{2.177}$$

Vorzeichenkonvention, so dass $e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ ebene Wellen beschreibt, die in Richtung $\vec{k}$ und nicht $-\vec{k}$ propagieren.
Ebene Welle: Flächen gleicher Phase (zu gegebener Zeit) und Ebene - Gegenbeispiel: Kugelwelle ($\frac{e^{ikr}}{r}$). Bezeichnungen:
$\vec{k}$ Wellenvektor, k Wellenzahl (manchmal), ω Frequenz der Welle.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi\nu$$

Mit der Wellenlänge λ, wobei $\frac{1}{\lambda}$ oft die Wellenzahl darstellt was offensichtlich $\neq k$ ist.

Fouriertransformierte Maxwellgleichungen Auch bekannt unter dem Namen "Maxwell im k-Raum".

Beispiel

$$\begin{aligned}\nabla\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r},t)\\ \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k d\omega i\vec{k}\vec{\tilde{E}}(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k d\omega\tilde{\varrho}(\vec{k},\omega)e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\end{aligned}$$

Benutze lineare Unabhängigkeit der Funktionen:

$$g_{\vec{k},\omega}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}e^{(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

oder wende $\int d^3r dt e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ auf beiden Seiten an:

$$i\vec{k}\vec{\tilde{E}}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\varrho}(\vec{k},\omega) \tag{2.178}$$

Analog folgen die anderen Maxwell-Gleichungen:

$$i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}}(\vec{k},\omega) = i\omega\vec{\tilde{B}}(\vec{k},\omega) \tag{2.179}$$

$$i\vec{k}\vec{\tilde{B}}(\vec{k},\omega) = 0 \tag{2.180}$$

$$i\vec{k}\times\vec{\tilde{B}}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{\tilde{j}}(\vec{k},\omega) - i\omega\frac{1}{c^2}\vec{\tilde{E}}(\vec{k},\omega) \tag{2.181}$$

Die Transformationen folgen also dem Abbildungsmuster:

$$\nabla\mapsto i\vec{k}, \frac{\partial}{\partial t}\mapsto -i\omega$$

Beispiel Elektrostatik

$$i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}}(\vec{k}) = 0, i\vec{k}\vec{\tilde{E}}(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde{\varrho}(\vec{k})$$

$$\Rightarrow i\vec{k}\times(i\vec{k}\times\vec{\tilde{E}}) = -\vec{k}(\vec{k}\vec{\tilde{E}}) + k^2\vec{\tilde{E}} = 0 \Rightarrow \vec{\tilde{E}}(\vec{k}) = \frac{-i\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\tilde{\varrho}(\vec{k}) \tag{2.182}$$

Nach Rücktransformation erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\tilde{\varrho}(\vec{k})\frac{i\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}e^{i\vec{k}\vec{r}} = \\
&= -\nabla\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\varepsilon_0\vec{k}}\int d^3r'\,\varrho(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\vec{r}'} = \\
&= -\nabla\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3r'\,\varrho(\vec{r}')\underbrace{\int d^3k\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2}}_{=:I(\vec{r}-\vec{r}')}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\vec{r}) &= \int d^3k\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{\infty}dkk^2\frac{e^{ikr\cos\vartheta}}{k^2} \\
&= 2\pi\int_0^{\infty}dk\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta e^{ikr\cos\vartheta} = \\
&= 4\pi\int_0^{\infty}dk\frac{\sin(kr)}{kr} = \underbrace{\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}dk\frac{\sin(kr)}{k}}_{=:J(\vec{r})}
\end{aligned}$$

$$J(\vec{r}) \overbrace{=}^{kr=x,r>0} \int_0^{\infty}dx\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Wie kommt das letzte Integral heraus (J)?

$$\frac{d}{dr}J(\vec{r}) = \int_0^{\infty}dk\cos(kr) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ikr} = \pi\delta(r)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad J(\vec{r}) = C+\pi\Theta(r), J(\vec{r}) = -J(\vec{r}) \\
&\Rightarrow\quad C = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow J(\vec{r}) = \frac{\pi}{2}, r>0 \\
&\Rightarrow\quad I(\vec{r}) = \frac{2\pi^2}{r}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\int d^3r'\frac{\varrho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2.183}$$

(Vergleiche (2.130))

Beachte $\int d^3k\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = I(\vec{r}) = \frac{2\pi^2}{r}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{4\pi}{k^2}e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{2.184}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{1}{r} \Leftrightarrow \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \tag{2.185}$$

Kapitel 3

Die Maxwellschen Gleichungen

Aus (1.13) bis (1.16) ist bekannt:

$$\begin{aligned}
\nabla\vec{E} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\
\nabla\vec{B} &= 0 \\
\nabla\times\vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \\
\nabla\times\vec{B} &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}
\end{aligned}$$

3.1 Eichinvarianz

Aus (2.141) folgt:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

Und mit (2.142):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\varphi(\vec{r},t) = \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Diese Relationen sind invariant unter den sogenannten Eichtransformationen (2.143):

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

Mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(\vec{r},t)$, sogenannte Eichfunktion.

3.2 Einfache Konsequenzen der Maxwell-Gleichungen

3.2.1 Wellengleichung

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\vec{E}) - \Delta\vec{E} \overbrace{=}^{(1.15)} -\nabla\times\dot{\vec{B}} \overbrace{=}^{(1.16)} -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\dot{\vec{j}} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\nabla\varrho - \frac{1}{c^2}\dot{\vec{j}}) \tag{3.1}$$

Analog für das magnetische Feld:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\underbrace{\nabla\vec{B}}_{=0}) - \Delta\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\nabla\times\vec{j} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{B}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\nabla\times\vec{j} \tag{3.2}$$

Definition 9 *Unter dem Wellenoperator, oder auch D'Alembert-Operator, Box-Operator oder in der Quantenmechanik "Quabla" genannten Operator versteht man:*

$$\Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{3.3}$$

Homogene Wellengleichung:

$$\Box\vec{E} = \Box\vec{B} = 0 \tag{3.4}$$

Benutze Eichfreiheit um $\varphi = 0$ zu fordern, wenn $\varphi \neq 0$ benutze Eichfunktion Λ mit $\frac{\partial}{\partial t}\Lambda = \varphi$.

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\vec{E} = 0 = -\nabla\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\vec{A}$$

Somit folgt dass $\nabla\vec{A}$ zeitunabhängig ist, da:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\vec{A} = 0$$

Zusätzliche Anforderung möglich: $\nabla\vec{A} = 0$ (Kann immer realisiert werden durch Gradienten einer zeitunabhängigen Funktion).

Ergebnis Im Vakuum ($\varrho = 0, \vec{j} = 0$) kann immer die folgende Eichbedingung gefordert werden:

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0, \nabla\vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \tag{3.5}$$

Dies entspricht der sogenannten Coloumb-Eichung oder Strahlungseichung. Damit folgt:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = \Box\vec{A} = 0 \tag{3.6}$$

Wellengleichung für das Vektorpotential. Betrachte Wellengleichung in 1 + 1 Dimension:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{3.7}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})f = 0 \tag{3.8}$$

Setze nun neue Koordinaten:

$$u = ct + x, v = ct - x, ct = \frac{1}{2}(u + v), x = \frac{1}{2}(u - v) \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$$

Mit (3.8) folgt nun:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}f = 0 \tag{3.10}$$

$$\Rightarrow f = f_1(u) + f_2(v) \tag{3.11}$$

$$\Leftrightarrow f(x,t) = f_1(ct + x) + f_2(ct - x) \tag{3.12}$$

Beachte: f_1, f_2 sind beliebige Funktionen. Während $f_1 = f_1(ct + x)$ eine Wellenbewegung in negative x-Richtung beschreibt, tut $f_2 = f_2(ct - x)$ dies in positive x-Richtung. Beide Lösungen propagieren mit der Geschwindigkeit c - Licht oder allgemeiner, elektromagnetische Wellengeschwindigkeit. Betrachte nun elektromagnetische Potentiale $\varphi, \vec{A}$ ohne Coloumbeichung (3.5).

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}(-\nabla\frac{\partial}{\partial t}\varphi - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2})$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\vec{A} + \frac{1}{c}\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A})) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \tag{3.13}$$

Wir benötigen eine neue Eichbedingung, die sogenannte Lorentz Eichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A}) = 0 \tag{3.14}$$

Somit folgt:

$$\Rightarrow \Box\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \tag{3.15}$$

Ähnlich (1.13): $\nabla(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$. Mit (3.14) folgt:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \Delta\varphi = \Box\varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{3.16}$$

Frage: Ist Lorentz-Eichung (3.14) immer möglich?
Beachte: $Q(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\vec{A} \neq 0$! Um umgeeichte Potentiale $\varphi', \vec{A}'$ mit

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A}) = 0$$

zu konstruieren, betrachte Eichfunktion $\Lambda(\vec{r},t)$ mit:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\Lambda(\vec{r},t) = -Q(\vec{r},t) \tag{3.17}$$

"Inhomogene Wellengleichung" $\rightsquigarrow$ Hilfreich zur Lösung ist die Greensche Funktion. Die Greensche Funktion in Verbindung mit dem $\square$-Operator kommt später. Nun mehr über Licht: Betrachte

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,t) &= \vec{E}(x \pm ct) \\
\vec{\tilde{E}}(k,\omega) &= \int dx \int dt \vec{E}(x \pm ct) e^{i(kx-\omega t)} = \\
&= \int dx \int dt \vec{E}(x) e^{-ikx} e^{-i(\pm ck-\omega)t} = \\
&= 2\pi\delta(\omega \mp ck) \int dx \vec{E}(x) e^{-ikx} = \\
&= 2\pi\delta(\omega \mp ck)\vec{\tilde{E}}(k)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Machen Probe:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk \int d\omega \vec{\tilde{E}}(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dk \vec{\tilde{E}}(k) e^{ik(x\pm ct)} = \vec{E}(x \pm ct)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

In drei räumlichen Dimensionen:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \vec{\tilde{E}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-ckt)} \tag{3.20}$$

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{k}) = \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}, k = |\vec{k}| \tag{3.21}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \vec{\tilde{B}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-ckt)} \tag{3.22}$$

$$\tag{3.23}$$

Somit folgt über

$$\nabla\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k (i\vec{k}\vec{\tilde{B}}(\vec{k})) e^{i(\vec{k}\vec{r}-ckt)}$$

dass $\vec{k}\vec{B}(\vec{k}) = 0$ gilt und somit die Transversalitätsbedingung herrscht:

$$\vec{k} \perp \vec{B} \tag{3.24}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{B}(\vec{k}) = -\frac{k}{c}\vec{E}(\vec{k}) \tag{3.25}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{B}) = -\frac{k}{c}\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad k^2\vec{B} = -\frac{k}{c}\vec{k}\vec{E} \Rightarrow ck\vec{B} = -\vec{k} \times \vec{E} \tag{3.26}$$

Man kann nun folgende Aussagen treffen:

$$\Rightarrow |\vec{E}(\vec{k})| \quad = \quad c|\vec{B}(\vec{k})| \tag{3.27}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}(\vec{k}) \quad \perp \quad \vec{B}(\vec{k}) \perp \vec{k} \tag{3.28}$$

Hier hat das Gaußsche Einheitensystem den Vorteil, dass sofort $|\vec{E}(\vec{k})| = |\vec{B}(\vec{k})|$ gilt (ohne Vorfaktor!). Es sind verschiedene Polarisationen möglich (linear, zirkular, elliptisch). Aufgrund der Transversalitätsbedingung sind nur 2 Polarisationsrichtungen unabhängig. (3.28) folgt auch aus $\nabla\vec{E} = 0$ (im Vakuum).

3.2.2 Kontinuitätsgleichung

Hierfür siehe (2.3.4)!

3.3 Maxwell'sche Gleichungen in Materie

Konzept: Teile Gesamtladungsdichte $\varrho(\vec{r}, t)$ und die Gesamtstromdiche $\vec{j}(\vec{r}, t)$ auf in freie und gebundene Ladungen und Ströme.

$$\varrho(\vec{r}, t) \quad = \quad \varrho_f(\vec{r}, t) + \varrho_g(\vec{r}, t) \tag{3.29}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) \quad = \quad \vec{j}_f(\vec{r}, t) + \vec{j}_g(\vec{r}, t) \tag{3.30}$$

$\varrho_f, \vec{j}_f$ beschreibt bewegliche (itinerante) Ladungsträger in kondensierter Materie (Festkörper, Flüssigkeiten).
$\varrho_g, \vec{j}_g$ beschreibt an Atomrümpfe gebundene Ladungen und Ströme in kondensierter Materie. Definieren nun neue elektrische Feldgrößen:

$$\vec{D} \quad = \quad \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{3.31}$$

$$\nabla\vec{D} \quad = \quad \varrho_f \tag{3.32}$$

$$\nabla\vec{P} \quad = \quad -\varrho_g \tag{3.33}$$

Wobei $\vec{D}$ die dielektrische Verschiebung bezeichnet und $\vec{P}$ die Polarisation.
Das selbe kann man auch fürs magnetische Feld definieren:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{3.34}$$

(Aus historischen Gründen und wegen physikalischer Gesetzmäßigkeiten sehen (3.31) und (3.34) nicht symmetrisch aus!)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f, \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_g$$

Mit dem Magnetfeld $\vec{H}$, der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ und der Magnetisierung $\vec{M}$.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \tag{3.35}$$
$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_g \tag{3.36}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie:

$$\nabla \vec{D} = \varrho_f \tag{3.37}$$
$$\nabla \vec{B} = 0 \tag{3.38}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{3.39}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \dot{\vec{D}} \tag{3.40}$$

Homogene Maxwell-Gleichungen ungeändert (3.38), (3.39) in den anderen $\varrho, \vec{j}$ ersetzt durch $\varrho_f, \vec{j}_f$. Ferner gilt:

$$\nabla \vec{P} = -\varrho_g, \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_g - \dot{\vec{P}} \tag{3.41}$$

Aus (3.37),(3.40) bzw. (3.33), (3.41) folgt die Kontinuitätsgleichung in Materie:

$$\dot{\varrho}_f + \nabla \vec{j}_f = 0 \tag{3.42}$$
$$\dot{\varrho}_g + \nabla \vec{j}_g = 0 \tag{3.43}$$

Soweit ist das Ganze ein physikalisch motiviertes aber immer noch recht Formales Konzept. Dies wirft einige Fragen auf, z.B. nach der Anschaulichen Bedeutung von $\vec{P}$ und $\vec{M}$. Der Vollständigkeit wegen noch die Maxwell-

Gleichungen in Materie im cgs-System:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \tag{3.44}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{3.45}$$

$$\nabla\vec{D} = 4\pi\varrho_f \tag{3.46}$$

$$\nabla\vec{B} = 0 \tag{3.47}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{3.48}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_f + \frac{\dot{\vec{D}}}{c} \tag{3.49}$$

$$\vec{D}^{SI} = \frac{1}{4\pi}\vec{D}^{cgs}, \vec{B}^{SI} = \frac{1}{c}\vec{B}^{cgs}, \vec{H}^{SI} = \frac{c}{4\pi}\vec{H}^{cgs}, \vec{M}^{SI} = c\vec{M}^{cgs} \tag{3.50}$$

Kapitel 4

Elektrostatik und Magnetostatik

4.1 Multipolentwicklung

4.1.1 Das elektrische Potential

Aus (2.130) wissen wir mit der Randbedingung ($\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = 0$):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Nun sei $\varrho(\vec{r'})$ nur von Null verschieden innerhalb einer Kugel vom Radius R und Ursprung $\vec{r'} = 0$. Nun betrachte $\phi(\vec{r})$ für $r \gg R$.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'}} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$$

Mittels Taylorentwicklung gelangt man auf die Multipolentwicklung:

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r'}}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{8}4\frac{(\vec{r}\vec{r'})^2}{r^5} + O(\frac{R^3}{r^5})$$

Somit ergibt sich für das Potential:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}\int d^3r' \varrho(\vec{r'}) + \frac{\vec{r}}{r^3}\int d^3r' \varrho(\vec{r'})\vec{r'} + \frac{1}{2r^5}\int d^3r' \varrho(\vec{r'})(3(\vec{r}\vec{r'})^2 - r^2r'^2) + ...) \tag{4.1}$$

Oder abgekürzt geschrieben:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}Q_{ij}r_ir_j + ...) \tag{4.2}$$

Der Gesamtladungs-oder monopolterm (Skalar) sieht wie folgt aus:

$$Q = \int d^3r \varrho(\vec{r}) \tag{4.3}$$

Das (elektrische) Dipolmoment ist ein Vektor:

$$\vec{P} = \int d^3r \varrho(\vec{r})\vec{r} \tag{4.4}$$

Das Quadrupolmoment ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe:

$$Q_{ij} = \int d^3r \varrho(\vec{r})(3r_i r_j - r^2\delta_{ij}) \tag{4.5}$$

Dabei stellen die Eigenwerte des Tensors die Quadrupolmomente dar. (4.2) beschreibt Elektrostatik in großer Entfernung von der Ladungsverteilung (Fernfeldnäherung).
Elektrisches Dipolmoment und Polarisation:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int d^3r \varrho_g(\vec{r})\vec{r} \overbrace{=}^{(3.33)} - \int d^3r \vec{r} \nabla \vec{P} = \\ &= \underbrace{- \int_{\partial V} d\vec{S}(\vec{r}\vec{p})}_{=0} + \int d^3r \vec{P} \Rightarrow \vec{p} = \int d^3r \vec{P} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Räumliche Mittelung:

$$\int d^3r \vec{P} \approx \vec{P} V \Rightarrow \vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \tag{4.7}$$

Dielektrische Polarisation $\vec{P}$ ist das elektrische Dipolmoment pro Volumen. Dies motivierte das Vorzeichen in der grundlegenden Definition (3.31)!

Bemerkung Für (4.6) gehen nur die gebundenen Ladungsträger ein. Die freien Ladungsträger tragen (unter anderem) zur Leitfähigkeit bei, aber nicht zum Dipolmoment.

4.1.2 Das statische Vektorpotential

Aus (2.137) ist bekannt:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

Über Fernfeldnäherung folgt:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r'}) + \frac{r_i}{r^3} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r'}) r'_i + ... \tag{4.8}$$

Erster Term:

$$0 = \int (d\vec{S}\vec{j})r_i = \int d^3r\nabla_k(j_kr_i) = \int d^3r(j_i - r_i\dot{\varrho}) \tag{4.9}$$

$$\Rightarrow \int d^3r\vec{j}(\vec{r}) = \dot{\vec{p}} \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow \int d^3r\vec{j}(\vec{r}) = 0 \tag{4.11}$$

Letzteres gilt nur im statischen Fall. Betrachten nun den zweiten Term:

$$0 = \int (d\vec{S}\vec{j})r_ir_k = \int d^3r\nabla_l(j_lr_ir_k) = \int d^3r(j_ir_k + j_kr_i - r_ir_k\dot{\varrho}) \tag{4.12}$$

Mit Statik ($\dot{\varrho} = 0$) folgt:

$$\int d^3rj_ir_k = -\int d^3rj_kr_i \Leftrightarrow r_i\int d^3r'j_kr'_i = \frac{1}{2}r_i\int d^3r(j_kr_i - j_ir_k) = (\vec{r}\times\int d^3r(\vec{j}\times\vec{r}')) \tag{4.13}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + ... \tag{4.14}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}) \tag{4.15}$$

$\vec{m}$ ist das magnetische Dipolmoment. Der Zusammenhang zwischen dem Magnetischen Dipolmoment und der Magnetisierung folgt aus:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}_g) = \frac{1}{2}\int d^3r(\vec{r}\times(\nabla\times\vec{M})) = \\ &= \frac{1}{2}\int d^3r(r_i\vec{\nabla}M_i - r_i\nabla_i\vec{M}) = -\frac{1}{2}\int d^3r(M_i\vec{\nabla}r_i - \vec{M}\nabla_ir_i) = \\ &= -\frac{1}{2}\int d^3r(-2M) = \int d^3r\vec{M}\end{aligned} \tag{4.16}$$

Räumliche Mittelung über $\int d^3r\vec{M} \approx \vec{M}V$:

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{m}}{V} \tag{4.17}$$

Magnetisierung ist also magnetisches Dipolmoment pro Volumen.

Bemerkung Im Gaußschen (cgs) Einheitensystem folgt:

$$\vec{m}^{cgs} = \frac{1}{2c}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}), \vec{M}^{cgs} = c\vec{M}^{SI} \Rightarrow \vec{M}^{cgs} = \frac{\vec{m}^{cgs}}{V}$$

Somit sind die Schreibweisen identisch. Für das elektrische Feld folgt nun:

$$\vec{E}_{DM} = -\nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \tag{4.18}$$

Und für das magnetische Feld:

$$\vec{B}_{DM} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r}\vec{m})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \tag{4.19}$$

Rechnung über:

$$(\vec{m}(\nabla \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{m}\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3}) = (3\frac{\vec{m}}{r^3} - 3\frac{\vec{m}}{r^3} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\vec{m})\vec{r}}{r^5})$$

4.2 Verschiedene Typen dielektrischer und magnetischer Materialen

4.2.1 Dielektrika

1. Deformationspolarisation

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\vec{D} - \vec{P})$$

(motiviert relatives Vorzeichen von $\vec{P}$)

2. Paraelektrika: permanente Dipole (zum Beispiel H_2O) - Orientierungspolarisation durch äußeres Feld

3. Ferroelektrika: Spontane Orientierung permanente Dipole unterhalb der Curie-Temperatur. Beispiel: $BaTiO_3$. In den beiden oberen Fällen gilt:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}), \vec{P}(0) = 0 \tag{4.20}$$

Entwickle dies nun in folgenden Term:

$$\vec{P} = \chi_E \varepsilon_0 \vec{E} \tag{4.21}$$

mit χ_E elektrische (dielektrische) Suszeptibilität (für homogenes isotropes Medium)

$$\vec{D} = (1 + \chi_E)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \tag{4.22}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_E \tag{4.23}$$

Dies ist die sogenannte Dielektrizitätszahl (Permitivität). Im thermischen Gleichgewicht gilt (siehe Landau-Lifschitz Band VIII):

$$\chi_E \geq 0 \Rightarrow \varepsilon_r \geq 1 \tag{4.24}$$

4.2.2 Magnetische Materialen

1. Diamagnetismus, Paramagnetismus

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}), \vec{M}(0) = 0 \tag{4.25}$$

   Keine spontante Magnetisierung. Entwickle

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \tag{4.26}$$

   die sogenannte magnetische Suszeptibilität und

$$\mu_r = 1 + \chi_M \tag{4.27}$$

   die Permeabilität wobei $\chi_M < 0$ Diamagnetismus beschreibt - welcher in der Natur am weitesten verbreitet ist, da $\vec{H}$ einen Kreisstrom induziert, welcher nach der Lenz'schen Regel ein entgegengesetztes Feld induziert. Bei $\chi_M > 0$ herrscht Paramagnetismus.

$$\vec{B} = (1 + \chi_M)\mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \tag{4.28}$$

2. Kollektiver Magnetismus

   - Ferromagnetismus: Hysterese, Curietemperatur, z.B. bei Fe, Co, N, Gd wobei $T_C(Gd) = 30°C$, oder auch Ferromagnetische Halbleiter.
   - Antiferromagnetismus: Wobei sich die einzelnen Domänen gegenseitig aufheben, abhängig von der sogenannten Neil-Temperatur T_N.
   - Ferrimagnetismus: Einzelne Bezirke schwächen das Gesamtbild, womit sich ein Wert größer als 0 ergibt, aber kleiner als möglich.

4.3 Elektromagnetische Felder an Grenzflächen

1. $\nabla\vec{D} = \varrho_f, \nabla\vec{P} = -\varrho_g$. Wir denken uns ein Volumen in Form einer Gauß'schen Dose über die Grenzfläche - also in den beiden Materialien. Nach dem Satz von Gauß folgt nun:

$$\vec{n}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \tag{4.29}$$

   Mit der Oberflächenladung der freien Ladungsträger σ_f.

2. $\nabla\vec{B} = 0$ - selbes Gedankenmodell wie eben:

$$\vec{n}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{4.30}$$

3. $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}+\dot{\vec{D}}$. Wir denken uns eine Rechtecksfläche. Die beiden Grenzübertretenden Seiten lassen wir gedanklich gegen 0 gehen. Nun gilt mit dem Satz von Stokes:
$$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{j}_f \tag{4.31}$$
Mit der Oberflächenflussdichte $\vec{j}_f$ der freien Ladungsträger. (4.31) gilt nur, wenn $\dot{\vec{D}}$ an Grenzfläche endlich ist.

4. Das selbe wie eben nochmal mit $\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow$ wenn $\dot{\vec{B}}$ endlich ist an der Grenzfläche:
$$\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \tag{4.32}$$

Zusammenfassend gilt, wenn $\sigma_f = 0, \vec{j}_f = 0$:

$$\vec{n}(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=0, \vec{n}(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0, \vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0, \vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \tag{4.33}$$

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes $\vec{E}$ und des Magnetfeldes $\vec{H}$ sowie die Normalkomponenten der Dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ und der Magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ sind stetig an der Grenzfläche. Dies gilt nicht nur in der Statik, sondern auch im dynamischen Fall und folgt in der Optik.

4.4 Die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\vec{r}) = f(\vec{r}), \Delta\vec{A}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) \tag{4.34}$$

Bisher nur folgende Randbedingungen betrachtet: $\lim_{r\to\infty}\phi(\vec{r}) = 0, \lim_{r\to\infty}\vec{A}(\vec{r}) = 0$. Im folgenden betrachten wir nur das skalare Feld ($\phi(\vec{r})$). Betrachten ein endliches Volumen V mit Rand $S = \partial V$. Zwei Typen von Randbedingungen:

1. Dirichlet:
$$\phi(\vec{r}) = h(\vec{r}), \vec{r}\in S \tag{4.35}$$

2. Neumann:
$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}} = \vec{n}\nabla\phi = h(\vec{r}), \vec{r}\in S \tag{4.36}$$
Mit $\vec{n}$, der Normaleneinheitsvektor auf S.

$h(\vec{r})$ ist dabei eine vorgegebene Funktion. Beweisen nun die Eindeutigkeit der jeweiligen Lösung:

1. Dirichlet: Betrachte zwei Lösungen ϕ, ϕ' die (4.35) und $\Delta\phi = \Delta\phi' = f(\vec{r})$ erfüllen. Definiere nun $u := \phi - \phi'$. Somit folgt:

$$\Delta u = 0, u = 0 \texttt{ auf } S \tag{4.37}$$

Die Lösung dieser Laplace-Gleichung ist $u = 0$. Nun stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit dieser Lösung. Wir betrachten dazu zwei Lösungen der Gleichung, u_1, u_2 und definieren uns $\Psi := u_1 - u_2$. Zu zeigen ist, dass $\Psi = 0$ gilt. Betrachten dazu die Green'sche Identität:

$$\int_{\partial V} d\vec{S} \Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \vec{n}} = \int_V d^3r (\Psi_1 \Delta \Psi_2 + (\nabla \Psi_1)(\nabla \Psi_2)) \tag{4.38}$$

Dies gilt für beliebige Skalarfelder Ψ_1, Ψ_2. Setze nun $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi$.

$$\Rightarrow \int_V d^3r (\nabla\Psi)^2 = 0 \Rightarrow \nabla\Psi \equiv 0 \Rightarrow \Psi = \texttt{const}$$

Damit folgt, dass $u = 0$ die eindeutig Lösung ist ($u_1 = u_2 = u$).

Beweis von (4.38), der Green'schen Identität Betrachte

$$\vec{H} = \Psi_1 \nabla \Psi_2 \Rightarrow \nabla \vec{H} = \Psi_1 \Delta \Psi_2 + (\nabla \Psi_1)(\nabla \Psi_2)$$

Nun verwende den Gauß'schen Satz und es folgt direkt die Green'sche Identität.

Bemerkung Durch Vertauschen von Ψ_1, Ψ_2 in (4.38) und Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man die sogenannte zweite Green'sche Identität:

$$\int_{\partial V} d\vec{S} (\Psi_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \vec{n}} - \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \vec{n}}) = \int_V d^3r (\Psi_1 \Delta \Psi_2 - \Psi_2 \Delta \Psi_1) \tag{4.39}$$

2. Neumann: Beweise zunächst Eindeutigkeit der Lösung der Laplace-Gleichung $\Rightarrow$ Eindeutigkeit für die Poisson-Gleichung.
Beachte: Randbedingungen im endlichen sind im Allgemeinen inkompatibel mit Invarianz unter räumlichen Translationen der Ladungsverteilung. Beispiel ist gegeben durch entfernen von Ladung im Bezug auf eine Leifähige Platte. Die Translation ändert somit die physikalische Situation, was Konsequenzen für die Green'sche Funktion hat:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \neq G(\vec{r} - \vec{r}') \tag{4.40}$$

Dies ist die sogenanten Translationsinvarianz die wir nun genauer untersuchen wollen:

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r},\vec{r}') = \Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{4.41}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + \varphi(\vec{r},\vec{r}') \tag{4.42}$$

$$\Delta_{\vec{r}} \varphi(\vec{r},\vec{r}') = \Delta_{\vec{r}'} \varphi(\vec{r},\vec{r}') = 0 \tag{4.43}$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}) \tag{4.44}$$

Zweite Green'sche Identität (4.39):

$$\begin{aligned} &= \int_V d^3r' (\varphi(\vec{r}')\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r},\vec{r}') - G(\vec{r},\vec{r}')\Delta_{\vec{r}'}\varphi(\vec{r}')) = \\ &= \varphi(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r' G(\vec{r},\vec{r}')\varrho(\vec{r}') = \\ &= \int_{\partial V} d\vec{S}(\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial \vec{n}'} - G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}'}) \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r}')\varrho(\vec{r}') + \int_{\partial V} d\vec{S}(\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial \vec{n}'} - G(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}'}) \tag{4.45}$$

Bemerkung Wenn V der gesamte Raum ist und φ im Unendlichen verschwindet, dann gilt:

$$G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Nun benutze Funtkion φ um andere Randbedingungen zu erfüllen:

1. Dirichlet: Wenn $\varphi(\vec{r})$ (aber nicht $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}$) auf ∂V gegeben ist, versuche folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\int_{\partial V} d\vec{S}' G_D(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = 0 \tag{4.46}$$

   Dies kann erfüllt werden durch die

$$G_D(\vec{r},\vec{r}') = 0 \forall \vec{r}' \in S \tag{4.47}$$

   Aus (4.45) folgt nun:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\varepsilon_0}\int_V d^3r' G_D(\vec{r},\vec{r}')\varrho(\vec{r}') + \int_{\partial V} d\vec{S}'\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G_D}{\partial\vec{n}'} \tag{4.48}$$

2. Neumann: Wenn $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = -\vec{E}\vec{n}$ gegeben ist auf Rand ∂V, versuche folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\int_{\partial V} d\vec{S}'\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G_N}{\partial\vec{n}'} = \varphi_0 \tag{4.49}$$

mit einer Konstanten φ_0.

Beachte Der Ansatz $\frac{\partial}{\partial\vec{n}'}G(\vec{r},\vec{r}') = 0\forall\vec{r}' \in \partial V$ führt zum Widerspruch.

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\frac{\partial G_N}{\partial\vec{n}'} = \int_V d^3r'\Delta_{\vec{r}'}G_N(\vec{r},\vec{r}') = 1$$

Daher folgender Ansatz:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}'}G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{A} \tag{4.50}$$

Mit A, dem Flächeninhalt von ∂V. Mit (4.49) folgt nun:

$$\varphi_0 = \frac{1}{A}\int_{\partial V} dS\varphi(\vec{r}) \tag{4.51}$$

Potentialgemittelt über Oberfläche ∂V:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'G_N(\vec{r},\vec{r}')\varrho(\vec{r}') - \int_{\partial V} d\vec{S}'G_N(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}'} \tag{4.52}$$

Beispiel für explizites Lösen der Poisson-Gleichung:
Methode der Bildladung - Problem: Ladung vor leitfähiger Platte. Aus (4.48) wissen wir: $\varrho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ somit folgt:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r''G_D(\vec{r},\vec{r}'')\varrho(\vec{r}'') = -\frac{q}{\varepsilon_0}G_D(\vec{r},\vec{r}'') \tag{4.53}$$

Ausdehnung Platte groß gegen $|\vec{r}'|$.

$$G_D(\vec{r},\vec{r}'') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + \varphi(\vec{r},\vec{r}')$$

Konzept: Interpretiere $-\frac{q}{\varepsilon_0}\varphi(\vec{r},\vec{r}')$ als Potential einer fiktiven Ladung außerhalb V, die zusammen mit dem Beitrag $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$ der Punktladung bei $\vec{r}'$ die Randbedingung $\varphi = 0$ auf ∂V realisiert.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{q_B}{|\vec{r} + \vec{r}_B|}\right) \tag{4.54}$$

Es sei $\vec{r}' = (0,0,z'), z' > 0, \vec{r}_B = (0,0,z_B), z_B < 0$ aufgrund der Symmetrie. Nun gelte $\varphi(\vec{r}) = 0, \forall \vec{r} = (x,y,0)$. Somit folgt:

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (-z')^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z'_B)^2}}$$

Nun gelte $q_B = -q, z_B = -z'$. Somit haben wir die Gleichung für die Bildladung (oder auch Spiegelladung - in Magnetostatik: Bildströme):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}'|}) \tag{4.55}$$

$$G_D = -\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}'|}) \tag{4.56}$$

Beachte $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r}) \neq G_D(\vec{r} - \vec{r}')$! Das Elektrische Feld sieht nun wie folgt aus:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{(x,y,z-z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{(x,y,z+z')}{|\vec{r} + \vec{r}'|^3}) \tag{4.57}$$

$$\vec{E}(x,y,0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{2z'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}})\hat{e}_z \tag{4.58}$$

Lösung der Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta\phi(\vec{r}) = 0, \phi(\vec{r}) = \phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{4.59}$$

Man sieht schnell: Radiale und Winkeldifferentationen sind seperiert. Nun wird ein Seperationsansatz folgendermaßen gemacht:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$$

Somit folgt:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{Y}(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}) \tag{4.60}$$

Linke Seite hängt nur von r, rechte nur von ϑ, φ ab. Daher müssen gleich einer Konstanten $l(l+1)$ sein.

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = l(l+1)R \tag{4.61}$$

Dies ist die sogenannte Radialgleichung.

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta})+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-l(+1)Y \tag{4.62}$$

Weiterer Seperationsansatz: $Y(\vartheta,\varphi)=A(\vartheta)B(\varphi)$.

$$\sin^2\vartheta(\frac{1}{A\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\frac{dA}{d\vartheta})+l(l+1))=-\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d\varphi^2} \tag{4.63}$$

Linke Seite hängt nur von ϑ ab, rechte nur von φ. Daher sind beide Seiten gleich einer Konstanten m^2. Somit folgt:

$$\frac{1}{A\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\frac{dA}{d\vartheta})+l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}=0 \tag{4.64}$$

(Polargleichung)

$$\frac{d^2B}{d\varphi^2}+m^2B=0 \tag{4.65}$$

(Azimutalgleichung)
Lösung von (4.65) ist:

$$B(\varphi)=\alpha e^{im\varphi}+\beta e^{-im\varphi}, m\in\mathbb{Z}$$

Nur dann gilt $B(\varphi)=B(\varphi+2\pi n), n\in\mathbb{Z}$.

$$B(\varphi)=\alpha e^{imB}+\beta e^{-imB} \tag{4.66}$$

In (4.64) substituire $z=\cos\vartheta$ und setze $A(\vartheta)=P(z)$

$$\frac{d}{dz}((1-z^2)\frac{dP}{dz})+(l(l+1)-\frac{m^2}{1-z^2})P=0 \tag{4.67}$$

(4.67) ist die sogenannte verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung benannt nach Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Die Lösungen von (4.67), die in $[-1,1]$ regulär sind, sind die sogenannten zugeordneten Legendreschen Polynome.

$$P_l^m=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_l(z), P_l^{-m}=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(z) \tag{4.68}$$

mit $m\in\{0,...,l\}, l\in\{0,1,2,...\}$.

$$P_l(z)=P_l^0(z)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l \tag{4.69}$$

(Gewöhnliche) Legendre-Polynome lösen die (gewöhnliche) Legendre Differentialgleichung.

$$\frac{d}{dz}((1-z^2)\frac{dP}{dz}) + l(l+1)P = 0 \tag{4.70}$$

Einige wichtige Eigenschaften:

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l \tag{4.71}$$

$$\int_{-1}^{1} dz P_l(z) P_k(z) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk} \texttt{ Orthogonal} \tag{4.72}$$

$$\int_{-1}^{1} dz P_l^m(z) P_k^m(z) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{lk} \tag{4.73}$$

Vollständigkeit der Legendre-Polynome:

$$\frac{2l+1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(z)P_l(z') = \delta(z-z') \tag{4.74}$$

Erzeugende Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(s)t^l \tag{4.75}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma)\frac{r_{\langle}^l}{r_{\rangle}^{l+1}} \tag{4.76}$$

Mit $\gamma = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{r}')$, $r_{\langle} = \min\{r, r'\}$, $r_{\rangle} = \max\{r, r'\}$.

Definition 10 (Kugelflächenfunktion)

$$y_{l,m}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\gamma)e^{im\varphi} \tag{4.77}$$

$$y_{l,-m}(\vartheta,\varphi) = (-1)^m y_{l,m}^*(\vartheta,\varphi), m \in \{0,..,l\}$$

Orthogonalität:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi y_{l,m}(\vartheta,\varphi) y_{l',m'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{4.78}$$

Vollständigkeit:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} y_{l,m}(\vartheta,\varphi)y_{l,m}^*(\vartheta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta') \tag{4.79}$$

Additivität:

$$\sum_{m=-l}^{l} y_{l,m}(\vartheta,\varphi) y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma) \tag{4.80}$$

Mit $\gamma = \sphericalangle((\vartheta,\varphi),(\vartheta',\varphi')), \cos\gamma = \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\vartheta\cos\vartheta'$.

Somit folgt mit (4.76):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l_\langle}{r^{l+1}_\rangle} \sum_{m=-l}^{l} y_{l,m}(\vartheta,\varphi) y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi') \tag{4.81}$$

Einfache Beispiele:

$$\begin{aligned}
P_0(z) &= 1, y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
P_1(z) &= z, y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \exp(i\varphi) \\
P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2-1), y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \\
P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3-3z), y_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{158}\pi \sin^2\vartheta \exp(2i\varphi) \\
y_{21} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta\cos\vartheta e^{i\varphi}, y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Einige Beweise (nach W. Greiner - Quantenmechanik Teil 1):
Betrachten (4.75) $F(t,1) := \frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(s)t^2$. Nun beweise, dass $P_l(s)$ tatsächlich durch (4.69) gegeben ist:

$$F(t,1) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)t^l \Rightarrow P_l(1) = 1$$

$$F(t,0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} t^{2n} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0)t^l, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

$$P_l(0) = \begin{cases} 0, & l \texttt{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{(l-1)!!}{2^{\frac{l}{2}}(\frac{l}{2})!}, & l \texttt{ gerade} \end{cases}$$

Und somit folgt:

$$P_l(s) = \frac{1}{l!}[\frac{d^l}{dt^l} \frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}}]_{t=0}$$

Wir entwickeln nun:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2st+t^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} (-2st)^n (1+t^2)^{-\frac{1}{2}-n} = \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-n \\ m \end{pmatrix} (-2s)^n t^{n+2m} \\
\frac{d^l}{dt^l} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-n \\ m \end{pmatrix} \frac{(n+2m)!}{(n+2m-l)!} (-2s)^n t^{n+2m-l} \\
t=0, P_l(s) &= \sum_{n} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-n \\ \frac{l}{2}-\frac{n}{2} \end{pmatrix} (2s)^n = \sum_n (-1)^{\frac{1}{2}(l-n)} \frac{(l+n)!s^n}{2^l(\frac{1}{2}(l+n))!(\frac{1}{2}(l-n))!n!}
\end{aligned}$$

Summe über alle positive n, so dass $l-n$ gerade und nicht negativ ist. Nun substituire $n = 2m - l$.

$$\begin{aligned}
P_l(s) &= \sum_m \frac{1}{2^l m!(l-m)!} \frac{(2m)!}{(2m-l)!} s^{2m-l} = \\
&= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{ds^l} \sum_{m=0}^{l} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} (-1)^{l-m} s^{2m} = \\
&= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{ds^l} (s^2-1)^l
\end{aligned}$$

Siehe (4.69) - sogenannte Rodriguez-Formel. Damit ist (4.75) bewiesen.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{s-t}{1-2st+t^2} F \Rightarrow (1-2st+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} l t^{l-1} P_l(s) = (s-t) \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(s)$$

Koeffizientenvergleich gleicher Potenzen von t:

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)sP_l + lP_{l-1} = 0 \tag{4.82}$$

Sogenannte Rekursionsbeziehung - nun berechne Analog:

$$(1-2st+t^2)\frac{\partial F}{\partial s} = tF \Rightarrow (1-2st+t^2) \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(s) t^2 = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(s) t^{l+1}$$

$$P' = \frac{dP}{ds} \Rightarrow P_l' - 2sP_{l-1}' + P_{l-2}' = P_{l-1} \tag{4.83}$$

Somit folgt direkt:

$$P_{l+1}' - 2sP_l' = P_l \tag{4.84}$$

Über (4.82) folgt nun, dass

$$(l+1)P_{l+1}' - (2l+1)P_l - (2l+1)sP_l' + lP_{l-1}' = 0 \tag{4.85}$$

Aus den beiden vorherigen Gleichungen kann man somit herleiten:

$$\Rightarrow \begin{cases} P'_{l+1} - sP'_l &= (l+1)P_l \\ sP'_l - P'_{l-1} &= lP_l \\ P'_{l+1} - P'_{l-1} &= (2l+1)P_l \\ (s^2-1)P'_l &= lsP_l - lP_{l-1} \end{cases} \tag{4.86}$$

Und somit erhält man:

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(s^2-1)P'_l = lP_l + lsP'_l - lP'_{l-1}$$

Mit (4.86) folgt nun:

$$\frac{d}{ds}(1-s^2)\frac{dP_l}{ds} + l(l+1)P_l = 0 \Rightarrow (4.70)$$

Bemerkung (4.70) ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, (4.69) gibt nur eine Lösung. Die Zweite Lösung erhält man über das d'Alembertsche Reduktionsprinzip.

$$f(z) = P_l(z)g(z) \tag{4.87}$$

mit $(1-z^2)f' - 2zf' + l(l+1)f = 0$. Somit folgt:

$$(1-z^2)(2P'_lg' + P_lg'') - 2zP_lg' = 0 \Rightarrow \frac{g''}{g'} = -\frac{2P'_l}{P_l} - \frac{2z}{z^2-1}$$

Somit erhält man:

$$\ln|g'| = -\ln(P_l^2) - \ln(1-z^2) + C \Rightarrow g' = \frac{1}{(z^2-1)P_l^2(z)}$$

$$f(z) = P_l(z)\int_0^z dz' \frac{1}{(z'^2-1)P_l^2(z')} \tag{4.88}$$

Bemerkung Legendre-Funktion zweiter Art mit Singularität bei $z = \pm 1$ und daher auch nicht geeignet als physikalische Lösung. Ähnliches gilt für Lösungen von (4.70) mit $l \notin \mathbb{N}$.

Orthogonalität der Legendre Polynome

$$\begin{aligned} I_{lk} &= \int_{-1}^1 dzP_l(z)P_k(z) = \frac{1}{2^{l+k}l!k!}\int_{-1}^1 dz(\frac{d^l}{dz^l}(z^2-1)^l)(\frac{d^k}{dz^k}(z^2-1)^k) = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{l+k}l!k!}\int_{-1}^1 dz(\frac{d^{l+k}}{dz^{l+k}}(z^2-1)^l)(z^2-1)^k \end{aligned}$$

Damit $I_{lk} = 0$ bei $k > l$ oder $k < l$, da $\frac{d^{l+k}}{dz^{l+k}}(z^2-1)^l = 0$.

$$\begin{aligned} I_{ll} &= \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1} dz(z^2-1)^l \frac{d^{2l}}{dz^{2l}}(z^2-1)^l = \\ &= \frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\underbrace{\int_{-1}^{1} dz(z^2-1)^l}_{=:J_l} \\ J_l &= [z(z^2-1)^l]_{z=-1}^{z=1} - \int_{-1}^{1} dz2z^2(z^2-1)^{l-1} = \\ &= -2lJ_l - 2lJ_{l-1} = \frac{-2l}{2^{l+1}}J_{l-1} \end{aligned}$$

Mit $J_0 = \int_{-1}^{1} dz = 2$ folgt direkt:

$$J_l = \frac{(-1)^l(2l)!!}{(2l+1)!!}2, I_{ll} = \frac{(2l)!(2l)!!}{2^{2l}(l!)^2(2l+1)!!} = \frac{2}{2l+1}$$

Es wurde dabei folgende Relation benutzt:

$$(2l)!! = 2^l l!, (2k+1)!! = (2k+1)(2k-1)(2k-3)..., (2k)!! = (2k)(2k-2)(2k-4)... = \frac{(2k)!}{(2k-1)!!}$$

Somit folgt mit (4.72):

$$\int_{-1}^{1} dzP_l(z)P_k(z) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$$

Nun zurück zur Lösung der LaPlace-Gleichung $\Delta\phi = 0$.

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} R_{lm}(r)y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{4.89}$$

Somit war folgendes Gegeben:

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})}_{=:\Delta_r} + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}_{=:\frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}}$$

Aus (4.63) wissen wir $\Delta_{\vartheta,\varphi}y_{lm} = -l(l+1)y_{lm}(\vartheta,\varphi)$. Die Kugelflächenfunktionen y_{lm} sind Eigenfunktionen des Winkelanteils $\Delta_{\vartheta,\varphi}$ des LaPlaceoperators. Zur Radialgleichung (4.61):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

Ansatz: $R(r) = \frac{U(r)}{r} \Rightarrow (\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2})U(r) = 0.$
Ansatz: $U(r) = \alpha r^\nu \Rightarrow \nu(\nu-1) = l(l+1) \rightsquigarrow \nu = \frac{1}{2} \pm (l + \frac{1}{2})$ Somit ist $\nu = l+1 \vee \nu = -l$.
Also gilt:

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$$

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} ((A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) y_{lm}(\vartheta, \varphi)) \tag{4.90}$$

Wichtiger Spezialfall: Azimutale Symmetrie - Problem ist symmetrisch bezüglich Rotationsachse. Gewünschte Lösung ist unabhängig von φ, nur $m = 0$ trägt bei.

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(A_l r^l + B_l r^{l(l+1)}) P_l(\cos\vartheta)$$

Beispiel Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r}_0 = r_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \sin\vartheta_0 \\ \sin\varphi_0 \sin\vartheta_0 \\ \cos\vartheta_0 \end{pmatrix}$. Auf einer Kugel mit Radius r_0 kann diese Punktladung durch die folgende Oberflächenladungsdichte beschrieben werden:

$$\sigma_f(\vartheta, \varphi, r_0) = \frac{q}{r_0^2} \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$$

Führen folgende Notation ein:
$\phi_<(\vec{r})$ als Potential für $r < r_0$
$\phi_>(\vec{r})$ als Potential für $r > r_0$
Setzen $\varepsilon_r = 1$ somit folgt: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}$. Bedingung an die Grenzfläche ist:

$$\vec{e}_r(\vec{E}_> - \vec{E}_<) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_f \Rightarrow \sigma_f = -\varepsilon_0(\frac{\partial\phi_>}{\partial_r} - \frac{\partial\phi_<}{\partial r}) \tag{4.91}$$

Weitere Bedingung an $\phi(\vec{r})$ sind:

1. $\phi(\vec{r})$ regulär am Ursprung $\vec{r} = 0$. $\phi_<(\vec{r}) = \sum_{l,m} A_{lm} r^l y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.
2. $\phi \to 0$ für $r \to \infty$. $\phi_>(\vec{r}) = \sum_{l,m} B_{lm} r^{-(l+1)} y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.
3. ϕ stetig bei $r = r_0$ und $(\vartheta, \varphi) \neq (\vartheta_0, \varphi_0) \Rightarrow A_{lm} r_0^l = B_{lm} r_0^{-(l+1)} =: \frac{1}{r_0} a_{lm}$.

Notation wie früher $r_> := \max\{r, r_0\}, r_< := \min\{r, r_0\}$.

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{r}{r_>} \sum_{l,m} a_{lm} (\frac{r_<}{r_>})^l y_{lm}(\vartheta, \varphi) \tag{4.92}$$

Bestimme a_{lm} aus Anschlussbedingung (4.91).

$$\begin{aligned}\sigma_f(\vartheta,\varphi,r_0) &= -\varepsilon_0(\frac{\partial\phi_>}{\partial r_>}-\frac{\partial\phi_<}{\partial r_<})_{r_>=r_<=r_0} = \\ &= -\varepsilon_0\sum_{l,m} a_{lm}y_{lm}(\vartheta,\varphi)(-(l+1)\frac{r_<^l}{r_>^{l+2}}-l\frac{r_<^{l-1}}{r_>^{l+1}}) = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{r_0^2}\sum_{l,m} a_{lm}(2l+1)y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (4.93)\end{aligned}$$

Andererseits ergibt Vollständigkeitsrelation (4.79):

$$\sigma_f(\vartheta,\varphi,r_0) = \frac{q}{r_0^2}\sum y_{lm}^*(\vartheta_0,\varphi_0)y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (4.94)$$

Damit folgt dann:

$$a_{lm} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{2l+1}y_{lm}^*(\vartheta_0,\varphi_0) \qquad (4.95)$$

Damit

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\varepsilon_0 r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}(\frac{r_<}{r_>})^l y_{lm}^*(\vartheta_0,\varphi_0)y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Andererseits gilt mit (4.76)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_>}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r_<}{r_>})^l P_l(\cos\gamma), \gamma = \sphericalangle(\vec{r},\vec{r}_0)$$

Somit ist (4.80) bewiesen:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} y_{lm}^*(\vartheta_0,\varphi_0)y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (4.96)$$

Sphärische Multipolentwicklung

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}y_{lm}(\vartheta,\varphi) \qquad (4.97)$$

Mit der Ladung q_{lm}:

$$q_{lm} = \int d^3r\varrho(\vec{r})y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) \qquad (4.98)$$

Die Sphärischen Multipolelemente erhält man über $l = 0$ (Monopol), $l = 1$ (Dipol) und $l = 2$ - dem Quadrupol, welcher immer Spurfrei ist.
Poisson-Gleichung in der Elektrostatik

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi \rightsquigarrow \nabla\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta\phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

Diest entspricht bei $\varrho = 0$ der LaPlace-Gleichung.

Magnetostatik

1. $\Delta\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}, \nabla\vec{A} = 0$ - Somit folgt das Biot-Savartsche Gesetz mit $\lim_{r\to\infty}\vec{A}(\vec{r}) = 0$.

2. $\nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}, \dot{\vec{D}} = 0$. Weitere Einschränkung: Keine Ströme. Somit folgt $\nabla\times\vec{H} = 0$. Wir erhalten:
$$\vec{H} = -\nabla\phi_M \tag{4.99}$$
Mit dem magnetostatischen Potential ϕ_M.
$$0 = \nabla\vec{B} = \mu_0\nabla(\vec{H}+\vec{M}) \Rightarrow \Delta\phi_M = \nabla\vec{M} \tag{4.100}$$

Letztes Beispiel Dielektrische Kugel im äußeren elektrischen Feld.
$$\Delta\phi = 0, \nabla\vec{D} = 0, \vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}}, \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$
Da $\varepsilon_r(\vec{r})$ bei $r = R$ springt - folgen Anschlussbedingungen. Azimutale Symmetrie (4.90):
$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\vartheta)$$
Notation:
$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \varphi_<(\vec{r}), & r < R \\ \varphi_>(\vec{r}), & r > R \end{cases}$$

1. Regularität bei $r = 0$.
$$\varphi_<(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$$

2. Asymptotisch homogenes Feld
$$\lim_{r\to\infty}\varphi_>(\vec{r}) = -E_0 z = -E_0 r\cos\vartheta = -E_0 r P_1(\cos\vartheta)$$
Somit folgt:
$$\lim_{>}(\vec{r}) = E_0 z P_1(\cos\vartheta) + \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)B_l r^{-(l+1)}P_l(\cos\vartheta)$$

3. Stetigkeit bei $r = R$ (dann auch Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig)
$$\varphi_<(R,\vartheta) = \varphi_>(R,\vartheta) \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{B_0}{R} \\ 3A_1 = -E_0 R + \frac{3B_1}{R^2} \\ A_l = \frac{B_l}{R^{2l+1}} \end{cases}$$

4. $\vec{e}_r\vec{D}$ stetig bei $r = R$, $\varepsilon_r^{(2)}(\frac{\partial\varphi_<}{\partial r})_{r=R} = \varepsilon_r^{(1)}(\frac{\partial\varphi_>}{\partial r})_{r=R}$:

$$\Rightarrow \varepsilon_r^{(2)}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)A_lR^{l-1}P_l(\cos\vartheta) = -\varepsilon_0^{(1)}E_0P_1(\cos\vartheta) - \varepsilon_r^{(1)}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)B_lR^{-l-2}P_l(\cos\vartheta)$$

Somit erhalten wir:

$$\Rightarrow \begin{cases} B_0 = 0 \\ 3\varepsilon_r^{(2)}A_1 = -\varepsilon_r^{(1)}E_0 - 6\varepsilon_r^{(1)}\frac{B_1}{R^3} \\ \varepsilon_r^{(2)}lA_lR^{l-1} = -\varepsilon_r^{(1)}(l+1)B_lR^{-l-2}, l \geq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_l = B_l = 0$ für $l + 1$. Wir erhalten also abschließend:

$$\begin{aligned} A_1 &= -E_0\frac{3\varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}} \\ B_1 &= \frac{1}{3}R^3E_0\frac{\varepsilon_r^{(2)} - \varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}} \end{aligned}$$

Die Lösung ist somit:

$$\varphi_<(\vec{r}) = \frac{-3\varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}}E_0r\cos\vartheta, \varphi_>(\vec{r}) = -E_0r\cos\vartheta + E_0R^3\frac{\varepsilon_r^{(2)} - \varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}}\frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad (4.101)$$

Für das elektrische Feld gilt somit:

$$\vec{E}_<(\vec{r}) = \frac{3\varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}}E_0\vec{e}_z \quad (4.102)$$

Definieren nun

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0R^3E_0\frac{\varepsilon_r^{(2)} - \varepsilon_r^{(1)}}{2\varepsilon_r^{(1)} + \varepsilon_r^{(2)}}\vec{e}_z \quad (4.103)$$

Somit folgt für das Potential außerhalb der Kugel:

$$\Rightarrow \varphi_>(\vec{r}) = -\vec{E}_0\vec{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} \quad (4.104)$$

Mit dem hinteren Term als Dipolpotential. Für das elektrische Feld innerhalb der Kugel folgt somit:

$$\vec{E}_>(\vec{r}) = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}) \quad (4.105)$$

Das homogene Feld überlagert sich mit dem Dipolfeld. Formal das gleiche Problem: Kugel mit Permabilität $\mu_r^{(2)}$ in Medium mit Permeablität $\mu_r^{(1)}$ und asymptotisch homogenen Magnetfeld $\vec{H}$.

$$\vec{H} = -\nabla\phi_M, \Delta\phi_M = \nabla\vec{M} = 0, \vec{B} = \mu_r\mu_0\vec{H}, \varepsilon_r^{(1)} \mapsto \mu_r^{(1)}, \varepsilon_r^{(2)} \mapsto \mu_r^{(2)}$$

Bei $r = R$ müssen die Anschlussbedingungen noch gefunden werden. Spezialfall davon ist bei $\mu_r^{(2)} = 0$ erreicht - Supraleitung (Meissner-Ochsenfeld-Effekt). Hier ist die Kugel ein perfekter Diamagnet.

Kapitel 5

Elektrodynamik

Mit (3.16) $\Box\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r},t)$, (3.15) $\Box\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$ und die Lorentz-Eichung (3.14) folgt $\frac{\partial\phi}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A}) = 0$. Betrachte nun die Punktladung q am Ursprung $\vec{r} = 0$ zur Zeit t. Dann gilt für $\vec{r} \neq 0$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = 0 \tag{5.1}$$

Sphärische Symmetrie $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}) = 0 \tag{5.2}$$

Ansatz wie in (4.89) oder (4.90) über $\phi(r) = \frac{U(r)}{r}$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0 \tag{5.3}$$

Analog wie in (3.12) setzen wir folgendermaßen an:

$$u = u_1(t - \frac{r}{c}) + u_2(t + \frac{r}{c})$$

Betrachten zunächst Funktion $u_1(t - \frac{r}{c})$ im Grenzfall $r \to 0$. Dann wächst das Potential ϕ beliebig an, und die räumlichen Ableitungen wachsen schneller als die zeitlichen.

$$\Box\phi \mapsto -\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \tag{5.4}$$

(Oder Formal $c \to \infty$.)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(t - \frac{r}{c})}{r} \tag{5.5}$$

Wobei $q(t)$ die Ladung zum Zeitpunkt t bei $r = 0$. Nun beliebige Ladungsverteilung:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.6}$$

Analog folgt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.7}$$

Die Interpretation ist, dass $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ ist die Zeit, welche die physikalische Wirkung der Ladung bei $\vec{r}'$ benötigt, um sich mit Lichtgeschwindigkeit nach $\vec{r}$ auszubreiten. Daher sind in $\phi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)$ die Quelle $\varrho, \vec{j}$ bei $\vec{r}'$ zur retardierten Zeit $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ auszuwerten. (5.6), (5.7) heißen retardierte Potentiale. Aus der Funktion $u_2(t + \frac{r}{c})$ hätten wir die folgenden Lösungen erhalten:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.8}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.9}$$

Hier sind die Quellen $\varrho, \vec{j}$ zur avanzierten Zeit $t_{av} = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ auszuwerten. Avanzierte Potentiale (normalerweise ohne physikalische Bedeutung) (5.6), (5.8):

$$\phi_{ret/av}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \int dt' \frac{\delta(t - t' \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})\varrho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.10}$$

Somit folgt für das Potential:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)\phi(\vec{r}, t) = \Box\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{r}, t)$$

Somit haben wir die Green'sche Funktion des Wellenoperators gefunden:

$$G_{ret/av}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta(t - t' \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.11}$$

Kontrolle: Erfüllen die retardierten (avancierten) Potentiale (5.6),(5.7),((5.8),(5.9)) die Lorentzeichung (3.14)?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\Big[\int d^3r' \frac{\dot{\varrho}(\vec{r}\,', t \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \\
&+ \int d^3r' \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\nabla_{\vec{r}}(\pm\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}) + \\
&+ \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}\,', t \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})\underbrace{\nabla_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{=-\nabla_{\vec{r}\,'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}\Big] \\
&\Rightarrow \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}\,', t \pm \frac{|\vec{r}\,'-\vec{r}|}{c})(-\nabla_{\vec{r}\,'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}) = \\
&= \int d^3r' \frac{\nabla_{\vec{r}\,'}\vec{j}(\vec{r}\,', t \pm \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial(ct)} + \nabla(c\vec{A}) = 0
\end{aligned}$$

Nun erneut Herleitung der Greenschen Funktion (5.11) per Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\vec{r},t) - \Delta G(\vec{r},t) &= \delta(\vec{r})\delta(t) \\
G(\vec{r},t) &= \frac{1}{(4\pi)^4}\int d^3k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k},\omega)\exp(i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)) \\
\delta(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp(i\vec{k}\vec{r}) \\
\delta(t) &= \frac{1}{2\pi}\int d\omega \exp(-i\omega t)
\end{aligned}$$

$$(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\tilde{G}(\vec{k},\omega) = -1 \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{-1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \rightsquigarrow G(\vec{r},t) = \frac{c^2}{(2\pi)^4}\int d^3k \int d\omega \frac{-1}{\omega^2 - c^2k^2}\exp(i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)) \tag{5.13}$$

Mit $\frac{1}{\omega^2-c^2k^2} = \frac{1}{2ck}(\frac{1}{\omega-ck} - \frac{1}{\omega+ck})$ folgt: Integrand hat Pole bei $\omega = \pm ck$, die das Integral zum divergieren bringen. Regularisieren wir das Integral durch Einführen eines infinitesimalen Imaginärteils, $\omega \mapsto \omega + i\varepsilon$, $\varepsilon \to +0$, Notation $\omega + i0$.

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{c}{2}\int d^3k \frac{1}{k}\int d\omega(\frac{1}{\omega + ck + i0} - \frac{1}{\omega + i0 - ck})\exp(i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)) \tag{5.14}$$

Betrachte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{1}{\omega + i0 + ck} - \frac{1}{\omega + i0 - ck}\right) \exp(-i\omega t)$$

Residuensatz: Schließe Integration durch Halbkreis im Unendlichen. Es gibt 2 Möglichkeiten - $t < 0$ mit dem oberen Halbkreis in der positiven Imaginären Halbebene, und $t > 0$ in der negativen Imaginären Halbebene. Für $t > 0$ ($t < 0$) trägt die Integration über unteren (oberen) Halbkreis nicht bei (Radius gegen Unendlich). Betrachte Fall "+": Polstelle des Integranden haben negativen Imaginärteil $\omega = \pm ck - i0$ ($\Rightarrow G_+(\vec{r}, t) = 0$ für $t < 0$).
Für $t > 0$ ergibt der Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{1}{\omega + i0 + ck} - \frac{1}{\omega + i0 - ck}\right) \exp(-i\omega t) = -2\pi i(e^{ickt} - e^{-ickt}) \tag{5.15}$$

Das Minuszeichen entsteht aufgrund der negativen Orientierung des Umlaufes.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G_+(\vec{r}, t) &= \frac{ic}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} dk\frac{k^2}{k}\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(ikr\cos\vartheta)(e^{ickt} - e^{ickt}) = \\
&= \frac{ic}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} dkk\frac{1}{ikr}(e^{ikr} - e^{-ikr})(e^{-ickt} - e^{ickt}) = \\
&= \frac{c}{2r}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk(e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)})
\end{aligned}$$

$$= \frac{c}{4\pi r}(\delta(r - ct) - \delta(r + ct)) \overbrace{=}^{t>0} \frac{1}{4\pi r}\delta(t - \frac{r}{c}) \tag{5.16}$$

Retardierte Greensche Funktion:

$$G_+(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = G_{ret}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.17}$$

Im Fall "−" verliertman analog

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(\frac{1}{\omega - i0 + ck} - \frac{1}{\omega - i0 - ck}\right) \exp(-i\omega t) = 2\pi i(e^{ickt} - e^{-ickt})$$

Für $t < 0$ folgt nun:

$$G_-(\vec{r}, t) = \frac{-c}{4\pi r}(\delta(r - ct) - \delta(r + ct)) = \frac{1}{4\pi r}\delta(t \pm \frac{r}{c}) \tag{5.18}$$

$$G_-(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = G_{av}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta(t - t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.19}$$

Wichtiges Beispiel Bewegliche Punktladung

$$\varrho(\vec{r},t) = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)), \vec{j}(\vec{r},t) = q\frac{\partial\vec{r}_0}{\partial t}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$$\begin{aligned}\phi_{ret}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \int dt' \varrho(\vec{r}',t')\frac{\delta(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int dt' \frac{\delta(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.13) folgt nun:

$$\delta(t'-t+\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_0(t)|) = [\frac{\delta(t-t'')}{|1-\frac{1}{c}\frac{\frac{\partial r_0(t'')}{\partial t''}|\vec{r}-\vec{r}_0(t'')|}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t'')|^3}|}]_{t''=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t'')|}{c}}$$

Und somit folgt nun für das Potential:

$$\Rightarrow \phi_{ret} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret})| - \frac{1}{c}(\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret}))(\frac{\partial\vec{r}_0(t)}{\partial t})_{t=t_{ret}}} \tag{5.20}$$

Analog folgt:

$$\vec{A}_{ret} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{(\frac{\partial\vec{r}_0}{\partial t})_{t=t_{ret}}}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret})| - \frac{1}{c}(\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret}))(\frac{\partial\vec{r}_0(t)}{\partial t})_{t=t_{ret}}} \tag{5.21}$$

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret})|}{c} \tag{5.22}$$

Diese Potentiale heißen Lienard-Wiechert'sche Potentiale. Die kompakte Notation ist die folgende:

$$(\frac{\partial\vec{r}_0(t)}{\partial t})_{t=t_{ret}} = \vec{v}_0 \tag{5.23}$$

$$\vec{r}-\vec{r}_0(t_{ret}) = \vec{R} \tag{5.24}$$

$$R = |\vec{R}|, v_0 = |\vec{v}_0 \tag{5.25}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R-\frac{\vec{v}_0\vec{R}}{c}} \tag{5.26}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{q\vec{v}_0}{R-\frac{\vec{v}_0\vec{R}}{c}} \tag{5.27}$$

Elektromagnetische Feldstärke

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(R-\frac{\vec{v}_0\vec{R}}{c})^2}(\vec{R}-\frac{\vec{v}_0}{c}R) + \frac{1}{c^2(R-\frac{\vec{v}_0\vec{R}}{c})^3}(\vec{R}\times((\vec{R}-\frac{\vec{v}_0}{c}R)\times\dot{\vec{v}}_0))] \tag{5.28}$$

Somit folgt auch für das Magnetfeld:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R}(\vec{R} \times \vec{E}) \tag{5.29}$$

Beachte dass $\vec{E} \perp \vec{B}$ und $\dot{\vec{v}}_0 = \frac{\partial v}{\partial t}$.

5.1 Energieerhaltung und elektromagnetische Felder: Poynting-Theorem

System von Punktladungen: Kinetische Energie.

$$\begin{aligned}
W_{kin} &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\vec{v}_\alpha^2 && (5.30)\\
\frac{d}{dt}W_{kin} &= \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} && (5.31)\\
m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha &= q(\vec{E} + \vec{v}_\alpha \times \vec{B}) && (5.32)
\end{aligned}$$

Also die Lorentzkraft ergibt. Damit können wir sagen

$$\Rightarrow \frac{dW_{kin}}{dt} = \sum_\alpha q v_\alpha \vec{E}_\alpha \tag{5.33}$$

Seine eine kontinuirliche Ladungsverteilung gegeben: $\vec{j} = \varrho\vec{v}$:

$$\Rightarrow \frac{dW_{kin}}{dt} = \int_V d^3r \vec{j}(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \tag{5.34}$$

Nun benutze Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vec{j}\vec{E} &= \vec{E}(\nabla \times \vec{H}) - \vec{E}\dot{\vec{D}} && (5.35)\\
\vec{E}(\nabla \times \vec{H}) &= -\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) + H(\nabla \times \vec{E}) = -\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H}\dot{\vec{B}} && (5.36)\\
\Rightarrow \frac{dW_{kin}}{dt} &= \int_V d^3r[-\vec{H}\dot{\vec{B}} - \vec{E}\dot{\vec{D}} - \nabla(\vec{E} \times \vec{H})] && (5.37)
\end{aligned}$$

Dies muss dann für ein beliebiges Volumen V gelten

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial w_{kin}}{\partial t} &= -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \nabla(\vec{E} \times \vec{H}) && (5.38)\\
&= -\frac{\partial w_f}{\partial t} - \nabla\vec{S} && (5.39)
\end{aligned}$$

Wobei w_{kin} die Dichte der kinetischen Energie darstellt. w_f ist die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie.

$$dw_f = \vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D} \tag{5.40}$$

Wir definieren die Energieflussdichte bzw. den Poynting-Vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{5.41}$$

Wieder zur Grundaussage zurückkommend können wir folgende Feststellung machen:

$$\frac{\partial w_f}{\partial t} + \nabla\vec{S} = -\vec{j}\vec{E} \tag{5.42}$$

In Linearen Medien gilt $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}, \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}, \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$:

$$w_f = \frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon_r\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_r}(c\vec{B})^2) \tag{5.43}$$

(5.39), (5.42) heißen Poynting-Theorem und beschreiben Energieerhaltung für elektromagnetische Felder.
Im Vakuum gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{S}(\vec{r},t) &= \varepsilon_0 c^2(\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)) && (5.44)\\
w_f(\vec{r},t) &= \frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^2 + (c\vec{B})^2) && (5.45)
\end{aligned}$$

In Gaußschen Einheiten transformieren diese Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
\vec{S}(\vec{r},t) &= \frac{c}{4\pi}(\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)) && (5.46)\\
w_f(\vec{r},t) &= \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) && (5.47)
\end{aligned}$$

5.2 Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Sei eine Ladungsverteilung mit maximaler Länge a gegeben. Innerhalb der Ladung bewege man sich mit dem Vektor $\vec{r}$, außerhalb mit dem Vektor $\vec{R}_0$.

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\vec{R}_0}{|\vec{R}_0|} && (5.48)\\
\vec{R} &= \vec{R}_0 - \vec{r} && (5.49)\\
R &= |\vec{R}_0 - \vec{r}| = R_0 - \vec{n}\vec{r} + O((\frac{a}{R_0})^2) && (5.50)
\end{aligned}$$

Retardierte Potentiale in großer Entfernung von der Ladungsverteilung: $a \ll R_0$.

$$\phi(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \int d^3r' \varrho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{R}_0 - \vec{r}'|}{c}) \tag{5.51}$$

$$A(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{R}_0 - \vec{r}'|}{c}) \tag{5.52}$$

Fernfeldnäherung analog zum statischen Fall. Eine solche Näherung ist jedoch in den Zeitargumenten so nicht möglich, da Zeitabhängigkeit von $\varrho, \vec{j}$ noch nicht spezifiert. Zeitliche Fouriertransformation:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{j}_\omega(\vec{r}) \exp(-i\omega t) \tag{5.53}$$

Somit folgt:

$$\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{R}_0 - \vec{r}'|}{c}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{j}_\omega(\vec{r}') \exp(-i\omega t + \frac{i\omega}{c}|\vec{R}_0 - \vec{r}'|)$$

wobei der letzte Term (im Exponenten von exp) den Retardierungseffekt ausmacht.

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-i\omega(t - \frac{R_0}{c})} \underbrace{e^{i\frac{\omega}{c}(|\vec{R}_0 - \vec{r}'| - R_0)}}_{=1 - i\frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{r}' + \ldots} \tag{5.54}$$

Mit Hilfe von $\omega = 2\pi\nu, \lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}, -i\frac{\omega}{c}\vec{n}\vec{r}' + \ldots = O(\frac{a}{\lambda})$ folgt nun die Langwellennäherung:

$$\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R_0}{c}) + O(\frac{a}{\lambda}) \tag{5.55}$$

Mit (5.52) folgt nun:

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R_0}{c}) + O(\frac{a^2}{R_0^2}, \frac{a}{\lambda}) \tag{5.56}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0} \dot{\vec{p}}(t - \frac{R_0}{c}) \tag{5.57}$$

Mit folgender Relation aus (4.10):

$$\int d^3r \vec{j} = \dot{\vec{p}}, \qquad \vec{p}: \text{ elektrisches Dipolmoment}$$

Nun betrachte $a \ll \lambda \ll R_0$: Hier kann die ausgesandte Strahlung als ebene Welle genähert werden (Wellenzone). Dann gilt

$$\vec{E} = c(\vec{B} \times \vec{n}) \tag{5.58}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{n} \times \vec{A}' = \vec{n} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial R} \tag{5.59}$$

Somit folgt, dass nur das Vektorpotential $\vec{A}$ nötig zur Bestimmung der Feldstärken ist. (Vergleiche mit (5.57)).

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R_0}(\ddot{\vec{p}}(t - \frac{R_0}{c}) \times \vec{n}) \tag{5.60}$$

(Nochmals Fernfeldnäherung $a \ll R_0$)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0}((\ddot{\vec{p}}(t - \frac{R_0}{c}) \times \vec{n}) \times \vec{n}) \tag{5.61}$$

Elektromagnetische Feldstärke der Dipolstrahlung. Es gelten folgende Relationen:

$$\ddot{\vec{p}} \propto \omega^2 \vec{p}, \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}, \qquad \vec{E}, \vec{B} \propto \sin\vartheta$$

Außerdem ist der Poynting-Vektor proportional zu $\vec{E} \times \vec{B} \propto \sin^2\vartheta$. Diese Dipolcharakteristik, keine Abstrahlung in Schwingungsrichtung, wird über den Poynting-Vektor ausgedrückt:

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2\vartheta}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3 R_0^2} \tag{5.62}$$

Integriere über Kugel vom Radius R_0 - Totale abgestrahlte Energie pro Zeit:

$$I = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3 R_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^3\vartheta = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{5.63}$$

- Klassische Beschreibung elastischer Lichtstreuung (Rayleigh-Streuung) $\rightsquigarrow$ Himmelsblau.
- Höhere Ordnungen in der Langwellennäherung: elektrische Quadrupolstrahlung, magnetische Dipolstrahlung, ...

Kapitel 6

Spezielle Relativitätstheorie

nach Albert Einstein (1879-1955) und Landau-Lifschitz Band II.

Relativitätsprinzip Die Naturgesetze sind in jedem Inertialsystem die gleichen. Keine absolute Zeit - „Zeit ist relativ.“. Insbesondere sind zwei Ereignisse, die in dem einem Inertialsystem gleichzeitig sind in anderen, d.h. Systemen, die sich relativ zum ersten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, Inertialsystemen nicht mehr gleichzeitig.
Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Inertialsystem gleich.

$$c = 299792458 \frac{m}{s}$$

Relativistische Effekte sind umso größer, je näher die auftretenden Geschwindigkeiten v an der Lichtgeschwindigkeit liegen. Für $v \ll c$ ist die Galilei'sche Mechanik eine gute Näherung, die eine absolute Zeit postuliert.
Betrachten Lichtsignal, das am Ort $\vec{x}_1$ zur Zeit t_1 ausgesandt und am Ort $\vec{x}_2$ zur Zeit t_2 aufgefangen wird.

$$s^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \tag{6.1}$$

Abstand zwischen Ereignissen $(ct_1, \vec{x}_1), (ct_2, \vec{x}_2)$. Punkte sin der verdimensionalen Raumzeit bestimmt durch

$$t := t_2 - t_1, \qquad \vec{x} := \vec{x}_2 - \vec{x}_1$$

$$s^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2 = 0 \tag{6.2}$$

Sogenannter Lichtartiger Vektor $(ct, \vec{x})$. Nun anderes Inertialsystem $(ct, \vec{x}) \mapsto (ct', \vec{x}')$:

$$s'^2 = (ct')^2 - \vec{x}'^2 = 0$$

Dies gilt, da die Lichtgeschwindigkeit gleich ist. Wenn zwei Ereignisse einen Lichtartigen Abstand $s^2 = 0$ haben, so gilt dies in allen Inertialsystemen. Betrachte nun infinitesimale Abstände ds^2, ds'^2 in verschiedenen Inertialsystemen. Da

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow ds'^2 = 0, \qquad ds^2 = a ds'^2, \tag{6.3}$$

gilt, kann a nur von Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen abhängen. Jede Abhängigkeit von Koordinaten würde die Homogenität von Raum und Zeit verletzen. Da der Raum zudem isotrop ist, kann a nur vom Betrag, nicht aber von der Richtung der Geschwindigkeit abhängen. Nun zwei weitere Inertialsysteme

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(|\vec{v}_1|) ds_1^2 \\ ds^2 &= a(|\vec{v}_2|) ds_2^2 \\ ds_1^2 &= a(|\vec{v}_{1,2}|) ds_1^2 \\ \Rightarrow \frac{a(v_2)}{a(v_1)} &= a(v_{1,2}) \end{aligned}$$

$\vec{v}_{1,2}$ relative Geschwindigkeit zwischen Inertialsystemen 1, 2. Der Vektor hängt vom Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ ab. Die linke Seite aber nicht. Somit können wir folgern, dass

$$a = const., \qquad \Rightarrow a = 1.$$

$$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow s^2 = s'^2 \tag{6.4}$$

Invarianz des Abstandes zwischen Ereignissen.

Klassifikation der Abstände

$$\left.\begin{array}{ll} s^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2 > 0 & \text{Zeitartiger Abstand} \\ s^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2 < 0 & \text{Raumartiger Abstand} \end{array}\right\} \text{Klassifikation unabhängig vom IS}$$

Koordinatentransformation $(ct, \vec{x}) \mapsto (ct', \vec{x}')$

- muss linear in den Koordinaten sein, da sonst ausgezeichnete Inertialsysteme existieren.

- Betrachten Inertialsysteme, die sich in x-Richtung bewegen:
  Keine Änderung der senkrechten Koordinaten: $y = y', z = z'$ - Konsistent mit der Galileitransformation $t = t'$:

  $$x = x' - vt, y = y', z = z'.$$

$$ct = ct' \cosh\alpha + x' \sinh\alpha, \qquad x = ct' \sinh\alpha + x' \cosh\alpha \tag{6.5}$$

Lässt Abstände invariant

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2t^2 - x'^2 = s'^2,$$

und wird für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ zur Galileitransformation:

$$\frac{v}{c} = \frac{x}{ct} = \tanh\alpha, \qquad x' = 0 \tag{6.6}$$

Somit folgt direkt:

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v^2}}}, \qquad \sinh\alpha = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6.7}$$

Damit können wir die Lorenztransformation aufstellen:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

Somit folgen die graphischen Darstellungen in Form der Minkowski-Diagramme.

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 = c^2 t_0, \qquad s^2 = c^2t^2 - x^2 = -l_0^2$$

Raumzeitpunkte, die den gleichen Abstand zu einem gegebenen Punkt haben (hier: Ursprung) liegen auf Hyperbeln. Euklidische Geometrie gilt im Unterraum gleichzeitiger Ereignisse (in einem gegebenen Inertialsystem).
Infinitesimale Zeitintervalle $x = vt, \qquad x' = 0$. Aus

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

folgt

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \tag{6.10}$$

Definition 11 *Die Eigenzeit ist definiert als*

$$\tau = \frac{1}{c} \int ds, \tag{6.11}$$

wobei die Integration entlang der Weltline $(ct(\tau), \vec{x}(\tau))$ *erfolgt.*

Kommen wir auf das sog. „Zwillingsparadoxon“ zu sprechen:

$$ct' = ct_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad c\tau < ct_0 \tag{6.12}$$

Betrachten zwei Uhren - Uhr 1 in Ruhe, Uhr 2 bewege sich auf einer geschlossenen Bahn in Raumzeit und kehre am Ende zu Uhr 1 zurück. Beachte: Ruhesystem von Uhr 2 ist kein Inertialsystem!
Wenn Uhr 2 zu Uhr 1 zurückkehrt, zeigt sie eine kleinere Zeit an als Uhr 1. Das umgekehrte Argument ist nicht möglich, da das Ruhesystem von Uhr 2 während der Reise kein Inertialsystem ist - sog. „Zwillingsparadoxon“.
Somit ist $\int ds$ maximal bei Integration entlang gerader Weltlinien. Insbesondere für Uhren die in einen bestimmten Inertialsystem ruhen.
Betrachten nun Maßstab mit Länge l_0 in seinem Ruhesystem zu festen Zeitpunkt t' für den Längenvergleich.

$$x' = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l < l_0, x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Es folgt also die Längenkontraktion:

$$l = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < l_0 \tag{6.13}$$

$$c^2t^2 - x^2 = -l_0^2, \quad l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}, \quad \Rightarrow \overline{x} = \frac{l_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Für den <u>kontravarianten Vektor</u> gilt:

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{6.14}$$

Dabei stellen $\mu, \nu, \lambda, ...$ die sogenannten Lorentz-Indizes (auch Viererindizes genannt) dar (0,1,2,3). $i, j, k, ...$ beschreiben die Räumlichen Komponenten (1,2,3).
Es folgt der <u>kovariante Vektor</u>:

$$x_\mu = (ct, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \tag{6.15}$$

Es wir die Einstein'sche Summenkonvention benutzt (i.d.F. über $\nu = 0..3$):

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu, \qquad x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu \tag{6.16}$$

Dabei ist η die Minkowski-Metrik, $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Wir stellen fest, dass folgende Beziehung gilt:

$$x'^{\mu} = (\Lambda(\vec{v}))^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{6.18}$$

Wobei $\Lambda(\vec{v})$ die Lorentztransformation darstellt. Die Lorentztransformation in x-Richtung, also wenn $\vec{v} = v\vec{e}_x$ gilt, ist:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

Allgemein kann man fest stellen, dass:

$$(\Lambda(\vec{v}))^T = \Lambda(\vec{v}), \quad (\Lambda(\vec{v}))^{-1} = \Lambda(-\vec{v}) \neq (\Lambda(\vec{v}))^T \tag{6.20}$$

Man sieht also, dass die Lorentztransformation nicht orthogonal ist - daher folgt also auch eine nicht-euklidische Geometrie.
Die Lorentztransformation für Geschwindigkeiten $\vec{v}$ in beliebiger Richtung:

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Lambda^0 = \Lambda^i{}_0 = \frac{-\frac{v^i}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \Lambda^i{}_j = \Lambda^j{}_i = \delta^i{}_j + (\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1)\frac{v^i v^j}{v^2} \tag{6.21}$$

- Reduziert sich auf (6.19) für $\vec{v} = (v, 0, 0)$.
- Transformiert kovariant unter räumlichen Drehungen.

$$O^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & O^i{}_j & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, O^i{}_j \in SO(3). \tag{6.22}$$

Es gilt $O\Lambda(\vec{v})O^T = \Lambda(O\vec{v})$. Ein Lorentzvektor (Vierervektor) ist ein vierkomponentiges Objekt, dass unter einem Wechsel des Inertialsystems wie folgt transformiert:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \tag{6.23}$$

(Kontravariante Komponente von A)

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu} \tag{6.24}$$

(Kovariante Komponente von A)

Beispiel Für Lorentztransformation eines Koordinatenvektors $x^\mu = (ct, \vec{x})$ eines Ereignisses. Verallgemeinerung: Lorentztensor n-ter Stufe.
Die Kontravarianten Komponenten:

$$A'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\ \nu_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\ \nu_n} A^{\nu_1 \dots \nu_n} \tag{6.25}$$

Die Kovarianten Komponenten:

$$A_{\mu_1 \dots \mu_n} = \eta_{\mu_1 \nu_1} \dots \eta_{\mu_n \nu_n} A^{\nu_1 \dots \nu_n} \tag{6.26}$$

Und auch für gemischte Komponenten:

$$A_{\mu_1}^{\ \mu_2 \dots \mu_n} = \eta_{\mu_1 \nu_1} A^{\nu_1 \dots \nu_n} \tag{6.27}$$

Die Minkowski-Metrik η ist Lorentztensor der Stufe zwei. Abstände sind invariant unter Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 &= c^2 t^2 - \vec{x}^2 \\ x'^\mu x'_\mu &= x^\mu x_\mu \\ x'^\mu \eta'_{\mu\nu} x' \nu &= x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu \end{aligned}$$

$$\Lambda^\mu_{\ \lambda} \eta'_{\mu\nu} \Lambda^\nu_{\ \sigma} x^\lambda x^\sigma = \eta_{\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma \Rightarrow \eta'_{\lambda\sigma} = \eta_{\lambda\sigma} \tag{6.28}$$

Es gilt:

$$\delta_\mu^{\ \rho} = \mathtt{diag}(1, 1, 1, 1) \tag{6.29}$$

Wenn A^μ durch die Lorentztransformation $\Lambda(\vec{v})$ nach $A'^\mu = (\Lambda(\vec{v}))^\mu_{\ \nu} A^\nu$ transformiert, so ist A_μ mit

$$(\Lambda(\vec{v}))^{T^{-1}} = \Lambda(-\vec{v}), \tag{6.30}$$

zu transformieren.

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} A^\nu \tag{6.31}$$

Somit rechnen wir

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \eta_{\mu\nu} A'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \lambda} A^\lambda = \delta_\mu^{\ \varrho} \eta_{\varrho\nu} \Lambda^\nu_{\ \lambda} A^\lambda = \qquad (6.32) \\ &= (\Lambda^{T^{-1}})_\mu^{\ \sigma} (\Lambda^T)_\sigma^{\ \varrho} \eta_{\varrho\nu} \Lambda^\nu_{\ \lambda} A^\lambda = (\Lambda^{T^{-1}})_\mu^{\ \sigma} \underbrace{\Lambda^\varrho_{\ \sigma} \Lambda^\nu_{\ \lambda} \eta_{\varrho\nu}}_{=\eta_{\sigma\lambda}} A^\lambda = \\ &= (\Lambda^{T^{-1}})_\mu^{\ \sigma} \eta_{\sigma\lambda} A^\lambda = (\Lambda^{T^{-1}})_\mu^{\ \nu} A_\nu = \\ A'_\mu &= (\Lambda^{T^{-1}})_\mu^{\ \nu} A_\nu \qquad (6.33) \end{aligned}$$

A^μ transformiert mit Λ und A_μ transformiert mit $\Lambda^{T^{-1}}$. A^μ, A_μ sind kontragredient zueinander. Beachte dass

$$M^{T^{-1}} = M^{T^{-1}} (M^{-1} M)^T = M^{T^{-1}} M^T M^{-1^T} = M^{-1^T}, \det M \neq 0,$$

gilt. Es seien A^μ, B^μ Lorentztensoren:

$$\Rightarrow A^\mu B_\mu = A^\mu \eta_{\mu\nu} B^\nu = A_\mu \eta^{\mu\nu} B_\nu, \tag{6.34}$$

ist invariant unter allen Lorentztransformationen - Lorentzskalar, d.h. Lorentztensor 0. Stufe!

Weiter gilt Es sei $A^{\mu\nu}$ Lorentztensor. Somit folgt für

$$A^\mu{}_\mu = A_\mu{}^\mu \tag{6.35}$$

Lorentzinvariant. Beachte: $A_{\mu\mu} = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu\mu}$ oder $A^{\mu\mu} = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu\mu}$ ist <u>nicht</u> Lorentz-invariant!

Weitere Bemerkungen

1. Kontravariante und Kovariante Tensorkomponenten sind verschieden voneinander, da Lorentztransformation nicht orthogonal und raumzeitliche Geometrie nicht euklidisch ist.
2. Lorentztransformation ist Lorentztensor ($\Lambda^\mu{}_\nu \mapsto (\tilde{\Lambda}\Lambda\tilde{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu$):

$$(\tilde{\Lambda}\Lambda\tilde{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\nu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\lambda \Lambda^\lambda{}_\varrho (\tilde{\Lambda}^{-1})^\varrho{}_\nu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\lambda (\tilde{\Lambda}^{T^{-1}})^\nu{}_\varrho \Lambda^\lambda{}_\varrho \tag{6.36}$$

   $\Lambda^\mu{}_\nu$ sind die gemischten Komponenten eines Lorentztensors.
3. Total antisymmetrischer Einheitstensor in vierdimensionaler Raumzeit

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho}, \varepsilon^{0123} = 1, \varepsilon^{\nu\mu\lambda\varrho} = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} = ..., \varepsilon_{0123} = -1 \tag{6.37}$$

   Dieser Tensor ist numerisch invariant unter Lorentztransformation, das heißt die Komponenten sind in jedem Inertialsystem die gleichen.

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{\mu\nu\lambda\varrho} &= \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\kappa \Lambda^\lambda{}_\eta \Lambda^\varrho{}_\alpha \varepsilon^{\sigma\kappa\eta\alpha} \\ &= C(\Lambda)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} \Rightarrow C(\Lambda) = \det(\Lambda) = 1 \\ \varepsilon'^{\mu\nu\lambda\varrho} &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda\varrho} \end{aligned}$$

   Damit die Determinante 1 ergibt, wurde vorausgesetzt, dass es sich nicht um eine Spiegelung handelt!

Betrachten Geschwindigkeitstransofmration in x-Richtung:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Es sind zweierlei Interpretationen möglich

1. Passive Transformation: x'^μ Koordinaten desselben Ereignisses wie x^μ in anderen Inertialsystem.
2. Aktive Transformation: x'^μ Koordinaten eines neuen Ereignisses im selben Inertialsystem.

Transformation partieller Ableitungen. Es sei a ein Lorentzskalar, $a' = a$

$$\underbrace{da}_{\text{Skalar}} = \frac{\partial a}{\partial x^\mu} \qquad \underbrace{dx^\mu}_{\text{Kontravarianter Vektor}}$$

Und somit folgt ein Kontravarianter Vektor

$$\frac{da}{dx^\mu} =: \partial_\mu a,$$

welcher definiert ist als

$$\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla). \tag{6.38}$$

Somit folgt:

$$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla) \tag{6.39}$$

Beachte hierbei das Vorzeichen - Vergleiche mit $x^\mu = (ct, \vec{r})$.

Vierer-Geschwindigkeit

$$v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}, \quad ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{6.40}$$

Somit ergibt sich

$$v^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \tag{6.41}$$

weshalb man fest stellt, dass

$$v^\mu v_\mu = 1, \qquad (\Leftrightarrow dx^\mu dx_\mu = ds^2). \tag{6.42}$$

v^μ ist Tangenteneinheitsvektor an die Weltlinie des Teilchens. Dynamik eines freien relativistischen Teilchens - Wirkung S:

$$S = -mc\int_{P_1}^{P_2} ds = -mc\int d\lambda\sqrt{\frac{\partial x^\mu}{\partial\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial\lambda}\eta_{\mu\nu}}. \tag{6.43}$$

Warum genau diese Wirkung?

- $\int ds$ ist der einzige (?) Lorentzskalar in Zusammenhang mit einem einzelnen Teilchen.
- Diese Wirkung führt auf die korrekte Dynamik und insbesondere auf den korrekten nichtrelativistischen Grenzfall.
- Vorfaktor $(-mc)$ so, dass WIrkung Dimension Energie×Zeit hat. Minuszeichen da $\int ds$ maximal entlang gerader Weltlinie und damit Wirkung minimal.

Wähle nun Paramter λ als Zeit

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =: + \int_{t_1}^{t_2} dtL. \tag{6.44}$$

Wir erhalten eine Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -mc^2 + \frac{m}{2} v^2 + O(\frac{v^2}{c^2}). \tag{6.45}$$

Korrektur nichtrelativistischer Grenzfall mit der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0, \tag{6.46}$$

mit dem kanonischen Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6.47}$$

Somit folgt aus (6.46):

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = 0, \quad \vec{p} \text{ ist erhalten.}$$

Veraltet ist dagegen die relativistische Masse

$$m_{rel}(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Energie, Hamilton

$$\begin{aligned}
E &= \vec{p}\vec{v} - L, \qquad (H = pq - L) \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad v \equiv 0 \qquad (6.48) \\
E &= mc^2 \quad \text{Ruheenergie, } m \text{ Ruhemasse} \qquad (6.49) \\
p^\mu &= mcv^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \quad \text{Impuls-Vierervektor} \qquad (6.50) \\
p^\mu p_\mu &= m^2c^2.
\end{aligned}$$

Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld Wichtige Größe: Ladung q Lorentzskalar. Wirkung?

$$S = \int_{P_1}^{P_2} (-mcds - \frac{q}{c} A^\mu dx^\mu) \tag{6.51}$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} (-mcds - q\vec{A}d\vec{r} - q\phi dt) \tag{6.52}$$

Es folgt für das Vektorpotential

$$A^\mu = (\phi, c\vec{A}), \tag{6.53}$$

ein sog. Vierervektor des elektromagnetischen Potentials. Wähle wieder Zeit als Integrationsvariable:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A}\vec{v} - q\phi) = + \int_{t_1}^{t_2} dtL, \tag{6.54}$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A}\vec{v} - q\phi. \tag{6.55}$$

Wie sieht es mit der Eichfreiheit aus?

$$\begin{aligned} \phi \mapsto \phi' &= \phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \vec{A} \mapsto \vec{A}' &= \vec{A} + \nabla\Lambda, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L \mapsto L' = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A}\vec{v} - q\phi + \overbrace{q\vec{v}(\nabla\Lambda) + q\frac{\partial}{\partial t}\Lambda}^{=\frac{d}{dt}(q\Lambda)}.$$

Somit folgt mit der totalen Zeitableitung $\frac{d}{dt}(q\Lambda)$:

$$\Rightarrow L' - L = \frac{d}{dt}(q\Lambda).$$

Wir führen den kanonischen Impuls ein:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A}, \tag{6.56}$$

$$= \vec{p} + q\vec{A}. \tag{6.57}$$

$\vec{p}$ kinetischer (kinematischer) Impuls. Hamilton:

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\phi \tag{6.58}$$

$H, \vec{P}$ erfüllen

$$\left(\frac{H - q\phi}{c}\right)^2 - (\vec{P} - q\vec{A})^2 = m^2c^2. \tag{6.59}$$