Wellen und Quanten Formelsammlung

Licht als elektromagnetische Welle

Wellengleichungen

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\Delta\vec{B} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Wellenfunktion

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi) \quad (3)$$

Wellenzahl k

$$k^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2, \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = v_{ph} \quad (4)$$

Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (5)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (6)$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$W_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r(E^2 + c^2B^2) = \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \quad (7)$$

Intensität des elektromagnetischen Feldes

$$\langle I(t)\rangle = \frac{1}{2}cn\varepsilon_0 E_0^2 \quad (8)$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{9}$$
$$\langle S \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 n c E_0^2 = \langle I \rangle \tag{10}$$

Absorption und Reflexion

$$P_{absorption} = \frac{I}{c}, P_{reflexion} = 2\frac{I}{c} \tag{11}$$

Frequenzabhängige Brechung

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \tag{12}$$
$$n_{\Re} \approx 1 + \frac{q^2 N}{2\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{13}$$

Intensität einer Welle

$$I(z) = I_0 \exp(\frac{2\omega n_I}{c} z) = I(0) \exp(-\alpha z) \tag{14}$$

Fourierentwicklung

$$E_x(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega) z)} d\omega \tag{15}$$
$$E_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(z,t) e^{i\omega t} dt \tag{16}$$

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gruppe} = \frac{d\omega}{dk} \tag{17}$$
$$v_{gruppe} = v_{ph}(1 - \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda})^{-1} \tag{18}$$

Reflexion und Transmission

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = (\frac{n_i - n_t}{n_i + n_t})^2 \tag{19}$$
$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_t}{n_i} t^2 = \frac{4 n_i n_t}{(n_z + n_i)^2} \tag{20}$$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \tag{21}$$

Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{22}$$

Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel

$$\theta_r = \theta_i \tag{23}$$

Snelliusssches Brechungsgesetz

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \tag{24}$$

Grenzwinkel θ_{gr} der Totalreflexion

$$\theta_{gr} = \arcsin(\frac{n_t}{n_i}) \tag{25}$$

Brewster-Winkel

$$\theta_B = \arctan(\frac{n_t}{n_i}) \tag{26}$$

Vier-Fresnel-Formeln

$$\underbrace{r_\perp, t_\perp}_{TE}, \underbrace{r_\parallel, t_\parallel}_{TM} \tag{27}$$

Geometrische Optik

Optischer Weg

$$W(s) = \int_S n(\vec{r}) ds \tag{1}$$

Extremalprinzip

$$(\frac{\delta W(s)}{\delta S})_{S_i} = 0 \tag{2}$$

Paraxiale Näherung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{3}$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \tag{4}$$

Dünne Linse

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \tag{5}$$

Linsenschleiferformel

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = \frac{1}{f} \tag{6}$$

Transversale Vergrößerung

$$v_T = \frac{\overline{B}}{\overline{G}} = -\frac{b}{g} = -\frac{b-f}{f} = -\frac{f}{g-f} \tag{7}$$

Longitudinale Vergrößerung

$$v_L = \frac{db}{dg} = -\frac{f^2}{(g-f)^2} = -v_T^2 \tag{8}$$

Teleskop - Sehwinkelvergrößerung

$$v = \frac{\alpha_{Instrument}}{\alpha_0} \tag{9}$$

$$v = \frac{z/f_1}{z/f_2} = \frac{f_2}{f_1} \tag{10}$$

Lupe - Vergrößerung

$$|v_T| = |\frac{-b-f}{f}| = |\frac{-b}{f} - 1| = \frac{s_0 - l}{f} + 1 \approx \frac{s_0}{f} + 1 \tag{11}$$

$$v = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_O} = \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f} \tag{12}$$

Mikroskop

$$\begin{aligned} v_{obj} &= \frac{b - f_1}{f_1} = \frac{t}{f_1}, t = b - f_1 && (13) \\ v_{ok} &= \frac{s_0}{f_2} && (14) \\ \Rightarrow v_{ms} &= v_{obj} v_{ok} = \frac{s_0 t}{f_1 f_2} && (15) \end{aligned}$$

Dicke Linsen und Linsensysteme

$$\frac{1}{f} = (n-1)[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + d(\frac{n-1}{nr_1r_2})] \tag{16}$$

$$H_1 = -d\frac{f(n-1)}{nr_2}, H_2 = -d\frac{f(n-1)}{nr_1} \tag{17}$$

ABCD-Matrix

Brechung an Kugelfläche mit Radius r

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\vec{S}_2 = B_{12}\vec{S}_1 \tag{19}$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2-n_1}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Translation um Strecke d_{12}

$$\vec{S}_2 = T_{12}\vec{S}_1 \tag{21}$$

Ausbreitung durch ein System

$$M = T_n \dots T_4 B_{43} T_3 B_{32} T_2 B_{21} T_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$M_{\texttt{dunneLinse}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Wellenoptik

Feldstärke $E_p(\vec{R})$ bei vorgegebener Feldverteilung

$$\begin{aligned} E_p(\vec{R}) &= \frac{-i}{2\lambda}\int_\Omega\int E_0(\xi,\eta)\frac{\exp(ikr)}{r}(\cos\chi - \cos\chi_0)d\xi d\eta = \\ &= \frac{-iE_0}{2\lambda}\int_\Omega\int \frac{\exp(ik(r+r_0))}{rr_0}(\cos\chi - \cos\chi_0)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{1}$$

Fresnel-Näherung

$$E_p(\vec{R}) \approx \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikz_0}}{z_0}\int_\Omega\int E_0(\xi,\eta)\exp(\frac{ik}{2z_0}((x-\xi)^2+(y-\eta)^2))d\xi d\eta \tag{2}$$

Fraunhofer-Näherung

$$E_p(\vec{R}) \approx \frac{-i}{\lambda}\frac{e^{ikz_0}}{z_0}\exp(ik\frac{xr+y^2}{2z_0^2})\int_\Omega\int E_0(\xi,\eta)\exp(\frac{-ik}{z_0}(x\xi+y\eta))d\xi d\eta \tag{3}$$

Fresnel-Zahl

$$F = \frac{\varrho^2}{\lambda z_0} \tag{4}$$

Mit dem (max.) Radius der Blende ϱ und der Ausbreitungsdistanz z_0.

Fresnelsche Zonen mit Radius ξ_m

$$\xi_m = \sqrt{z_0 m\lambda} \tag{5}$$

Fraunhofer-Beugung am Einfachspalt

$$E(u) \propto \frac{\sin(\pi ub)}{\pi ub} \tag{6}$$

Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \tag{7}$$

Die Koeffizienten c_n berechnen sich über:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \tag{8}$$

Fourier-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{9}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{10}$$

$$\mathtt{FT}\{f(\frac{t}{\alpha})\} = |\alpha|\tilde{f}(\alpha\omega) \tag{11}$$

$$\mathtt{FT}\{f(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\tilde{f}(\omega) \quad , \quad \mathtt{FT}\{e^{i\omega_0 t}f(t)\} = \tilde{f}(\omega-\omega_0) \tag{12}$$

$$\mathtt{FT}\{t^n f(t)\} = i^n\frac{d^n\tilde{f}(\omega)}{d\omega^n} \quad , \quad \mathtt{FT}\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\} = (i\omega)^n\mathtt{FT}\{f(t)\} \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \tag{14}$$

Faltungsregeln:

$$\mathtt{FT}\{f(t)*g(t)\} = \mathtt{FT}\{f(t)\}\mathtt{FT}\{g(t)\} \tag{15}$$

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{16}$$

Beugung am Doppelspalt Bei Limes → 0:

$$I(u) = I_0 \cos^2(\pi a u), u = \frac{x}{\lambda, z_0} \tag{17}$$

Mit endlicher Spaltbreite:

$$I(u) = I_0 \cos^2(\pi a u) \frac{\sin^2(\pi u b)}{(\pi u b)^2} \tag{18}$$

Beugung am Gitter Kostruktive Interferenz (Maxima) für ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\Delta s = a \sin \vartheta = n\lambda \tag{19}$$

$$I_N = I_0 \frac{\sin^2(\pi N a u)}{\sin^2(\pi a u)} \frac{\sin^2(\pi b u)}{(\pi b u)^2} \tag{20}$$

Spektrale Auflösung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nN} \tag{21}$$

Maxima n-ter Ordnung und Strichzahl N.

Allgemeine Betrachtung zur Beugung

$$k_{0x} - k_x = nG \tag{22}$$

Gitterkonstante im Fourier-(reziproken) Raum

$$G = \frac{2\pi}{a} \tag{23}$$

Bedingung für Maxima

$$\vec{k} - \vec{k}_0 = \vec{G}, \vec{G} = 2\pi \begin{pmatrix} n_1/a_x \\ n_2/a_y \\ n_3/a_z \end{pmatrix}, n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \tag{24}$$

Bragg-Bedingung

$$2d \sin\varphi = n\lambda \tag{25}$$

Airy-Muster

$$I(u) = I_0 \left(\frac{2J_1(\pi D u)}{\pi D u} \right)^2 \tag{26}$$

Für Blendendurchmesser D, J_1: Besselfunktion 1. Ordnung.

Rayleigh-Kriterium

$$\sin\theta_{min} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{27}$$

Numerische Aperatur

$$NA = n\sin\vartheta \approx \frac{nD}{2f}$$

Somit folgt für das Auflösungsvermögen

$$d_{min} = 0.61\frac{\lambda}{NA} \tag{28}$$

Auflösungsvermögen eines Mikroskops nach Abbe

$$d_{min}\sin\vartheta = \lambda, \qquad d_{min} = \frac{\lambda}{NA} \tag{29}$$

Sagnac-Interferometer

$$\Delta s = \frac{2x}{\lambda} = \frac{4A\Omega}{\lambda c}, \qquad \Delta\nu = \frac{4A\Omega}{\lambda P} \tag{30}$$

Mit Ω der Winkelgeschwindigkeit pro Zeit, der Umlaufenen Fläche A, Weglänge P und Strecke und Differenz der Strecken s, x.

Mach-Zehnder-Interferometer Änderung des optischen Weges mit ΔnL.

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta nL}{\lambda} \tag{31}$$

Interferenz gleicher Neigung Phasensprung an Grenzfläche (Vorzeichen Fresnel-Formeln)

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n_f < n_1 \quad \text{und} \quad n_f < n_2 \\ \pi & \text{für} \quad n_f > n_1 \quad \text{und} \quad n_f > n_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{32}$$

Vielfachinterferenz

$$I_T = I_0 - I_R = I_0\frac{1}{1 + F\sin^2(\frac{\delta}{2})} \tag{33}$$

Young'sches Doppelspaltexperiment

$$\phi \ll \frac{\lambda}{2d} \tag{34}$$

$$\Delta\omega\Delta t \geq 1 \tag{35}$$

Für Licht einer Spektralen Breite $\Delta\omega$ und Pulsdauer oder Kohärenzlänge $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$.

Polarisationsoptik und Nicht-Lineare Optik

Polarisation elektromagnetischer Wellen

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |E_{o,x}| \\ |E_{0,y}|e^{i\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz + \varphi)} \tag{1}$$

γ: Rel. Phasenverschiebung, $\frac{|E_{0,x}|}{|E_{0,y}|} = \xi$: Amplitudenverhältnis.

Linear Polarisierte Welle

$$\gamma = 0, \qquad \text{oder } \gamma = \pi \tag{2}$$

Zirkular Polarisierte Welle

$$\xi = 1, \qquad \text{und } \gamma = \pm\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Ansonsten handelt es sich um eine elliptisch polarisierte Welle.

Gesetz von Malus

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta \tag{4}$$

Doppelbrechung

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon} \vec{E}, \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}, \overleftrightarrow{\varepsilon} = \mathbb{E} + \overleftrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^{n\times m} \tag{5}$$

Hauptachsendarstellung

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i, i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Optisch isotrope Medien:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon \tag{7}$$

(Gase, Flüssigkeiten, Gläser, Diamant)
Optisch einachsige Materialen:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_\perp, \qquad \varepsilon_z = \varepsilon_\parallel \neq \varepsilon_\perp \tag{8}$$

(Calcit, Quarz, Eis)
Optisch zweiachsige Kristalle:

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z \neq \varepsilon_x \tag{9}$$

(Glimmer, Aragomit, Topas, Rohrzucker)

Brechungsindexellipsoid

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = -\frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\vec{D} \tag{10}$$

Brechungsindex wie gewohnt

$$\vec{e}_k \times \vec{e}_k \times \vec{E} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\vec{E} = 0 \tag{11}$$

Zwei Lösungen für n^2:

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_\perp}, \qquad \frac{1}{(n_e(\vartheta))^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{\varepsilon_\perp} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varepsilon_\parallel} \tag{12}$$

Welle-Teilchen Dualismus

Impuls eines Photons

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{1}$$

Photoelektronische Gleichung

$$E_{Ph} = \hbar\omega = W_A + E_{kin} \tag{2}$$

Wobei W_A die Austrittsarbeit ist.

$$\hbar\omega = W_A + eU_{stop} \tag{3}$$

Zu $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js gilt folgende Beziehung:

$$\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}2\pi\nu = h\nu \tag{4}$$