Zusammenfassung der Mathematikvorlesungen für Physiker

Johannes Wild

Wintersemester 2008/2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Dieses Skript dient zur Prüfungsvorbereitung im Physik-Studium auf die mündliche Bachelor-Modul-Prüfung Mathematik und soll nur einen kurzen Überblick über den Stoff geben.
Stofftechnisch richte ich mich an die

- **Analysis 1** Vorlesung von Herrn Prof. Bunke im WS 07/08
- die **Analysis 2 für Physiker** Vorlesung von Herrn Prof. Kollross im SS 08
- und die **Analysis 3 für Physiker** Veranstalltung von Herrn Prof. Habermann im WS 08/09

Ich habe mich entschlossen im ersten Teil die **Axiome** der Analysis zusammenzufassen, danach die wichtigsten **Definitonen**, **Sätze** und **Korollare** nach den einzelnen Fächern und Themengebieten geordnet aufzulisten. So weit nötig hab ich auch noch wichtige **Lemmas** dazugepackt.
Falls ihr irgendwelche Fehler findet, schickt mir einfach eine Mail an:
wild.johannes@web.de

Kapitel 2

Axiome der Analysis

2.1 Körperaxiome der reellen Zahlen

2.1.1 Axiome der Addition

Axiom 1 (Assoziativgesetz) *Für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Axiom 2 (Kommutativgesetz) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$x + y = y + x$$

Axiom 3 (Existenz der Null) *Es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbb{R}$*, so dass*

$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Axiom 4 (Existenz des Negativen) *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *existiert eine Zahl* $-x \in \mathbb{R}$*, so dass*

$$x + (-x) = 0$$

2.1.2 Axiome der Multiplikation

Axiom 5 (Assoziativgesetz) *Für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axiom 6 (Kommutativgesetz) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axiom 7 (Existenz der Eins) *Es gibt ein Element* $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$*, so dass*

$$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Axiom 8 (Existenz des Inversen) *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq 0$ *existiert eine Zahl* $x^{-1} \in \mathbb{R}$*, so dass*

$$x \cdot x^{-1} = 1$$

2.2 Die Anordnungsaxiome

Axiom 9 (Trichotomie) *Für jedes x gilt genau eine der drei Beziehungen:*

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

Axiom 10 (Abgeschlossenheit gegenüber Addition)

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \;\Rightarrow\; x + y > 0$$

Axiom 11 (Abgeschlossenheit gegenüber Mulitplikation)

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \;\Rightarrow\; x \cdot y > 0$$

Axiom 12 (Archimedisches Axiom) *Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit*

$$n \cdot x > y$$

2.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Axiom 13 (Vollständigkeitsaxiom) *In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchyfolge.*

Bemerkung Mit den **Körperaxiomen** (2.1), den **Anordungsaxiomen** (2.2), dem **Archimedischen Axiom** (12) umd dem **Vollständigkeitsaxiom** (13) haben wir alle Axiome der reellen Zahlen aufgezählt. Ein Körper, in dem diese Axiome erfüllt sind, heißt **vollständiger, archimedischer Körper**.

2.4 Peanoaxiome

Nach Peano lassen sich die natürlichen Zahlen charakterisieren als eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichentem Element 0 und einer Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

Axiom 14 $x \neq y \Longrightarrow \nu(x) \neq \nu(y)$*, d.h. zwei verschiedene Elemente von $\mathbb{N}$ haben auch verschiedene Nachfolger.*

Axiom 15 $0 \notin \nu(\mathbb{N})$*, d.h. kein Element von $\mathbb{N}$ hat 0 als Nachfolger.*

Axiom 16 (Induktionsaxiom) *Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

1. $0 \in M$
2. $x \in M \Rightarrow \nu(x) \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

2.5 Weitere Axiome

Axiom 17 (Extensionalitätsaxiom) *Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn die Äquivalenz der Aussagen*

$$(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)$$

gilt

Axiom 18 (Aussonderungsaxiom) *Für jede Aussage $a \mapsto P(a)$ existiert die Menge*

$$B := \{ a \in A \mid P(a) \}$$

Axiom 19 (Regularitätsaxiom) *Jede nichtleere Menge A enthält ein Element $B \in A$ derart, dass $A \cap B \neq \emptyset$*

Axiom 20 *Es gibt eine Menge*

Axiom 21 (Paarmengenaxiom) *Zu je zwei Mengen A,B gibt es eine Menge $\{A,B\}$, welche genau die Elemente A,B als Elemente hat:*

$$(x \in \{A, B\}) \leftrightarrow (x = A) \vee (x = B)$$

Axiom 22 (Vereinigungsaxiom) *Für jede Menge Z existiert eine Menge X, welche genau die Elemente von Z enthält. Sie wird durch*

$$(x \in X) \leftrightarrow (\exists\, z \in Z \mid x \in z)$$

charakterisiert.

Axiom 23 (Potenzmengenaxiom) *Für jede Menge exisiert die Potenzmenge. Die Potenzmenge einer Menge A wird durch*

$$(X \in P(A)) \leftrightarrow (X \subseteq A)$$

charakterisiert.

Axiom 24 (Auswahlaxiom) *Das karthesische Produkt einer nichtleeren Familie von nichtleeren Mengen ist nichtleer.*

Axiom 25 (Unendlichkeitsaxiom) *Es gibt eine Nachfolgermenge.*

Kapitel 3

Zusammenfassung Analysis 1

3.1 Einführung in die mathematische Sprache

3.1.1 Mengen

Definition 3.1 $(B \subseteq A) := (x \in B) \rightarrow (x \in A)$

Definition 3.2 *Die Menge* $B := \{a \in A \mid \mathcal{P}(a)\}$ *ist durch*

$$(b \in A) \wedge \mathcal{P}(b)$$

charakterisiert.

Definition 3.3 *Wir definieren die leere Menge* $\emptyset$ *durch*

$$(x \in \emptyset) \leftrightarrow f$$

Korollar 3.1 *Für jede Menge gibt es ein Objekt, welches nicht Element der Menge ist. Es gibt also keine Menge aller Mengen.*

Definition 3.4 *Die* ***Vereinigung*** $C := A \cup B$ *ist durch*

$$(x \in C) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

charakterisiert.

Definition 3.5 *Der* ***Durchschnitt*** $C := A \cap B$ *ist durch*

$$(x \in C) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

charakterisiert.

Definition 3.6 *Wir definieren den* ***Durchschnitt*** $\bigcap_{A\in X} A$ *einer nichtleeren Menge von der Menge X durch*

$$(x \in \bigcap_{A\in X} A) \leftrightarrow (\forall A \in X \mid x \in A)$$

.

Definition 3.7 *Für zwei Mengen A und B definieren wir die* ***Differenz***

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$$

Definition 3.8 *Die* ***Potenzmenge*** $\mathcal{P}(x)$ *einer Menge A wird durch*

$$(X \in \mathcal{P}(A)) \leftrightarrow (X \subseteq A)$$

charakterisiert.

3.1.2 Paare, Relationen

Definition 3.9 *Die Menge $A \times B$ ist das* ***kartesische Produkt*** *der Menge A und B.*

Definition 3.10 *Eine binäre* ***Relation*** *zwischen Elementen aus den Mengen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.*

Definition 3.11 *Sei R eine Relation auf der Menge A. Eigenschaften von R:*

1. ***reflexiv****: Für alle $a \in A$ gilt aRa*
2. ***symmetrisch****: Für alle $a, b \in A$ gilt $aRb \leftrightarrow bRa$*
3. ***antisymmetrisch****: Für alle $a, b \in A$ gilt $aRb \wedge bRa \rightarrow b = a$*
4. ***asymmetrisch****: Für alle $a, b \in A$ gilt $aRb \leftrightarrow\sim (bRa)$*
5. ***transitiv****: Für alle $a, b \in A$ gilt $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$*
6. ***total****: Für alle $a, b \in A$ gilt $aRb \vee bRa \vee a = b$*

Definition 3.12 *Eine* ***Äquivalenzrelation*** *ist eine* ***reflexive, transitive und symmetrische*** *Relation.*
Eine ***Halbordnungsrelation*** *ist eine* ***reflexive, transitive und antisymmetrische*** *Relation. Eine Halbordungsrelation ist eine Ordungsrelation, wenn sie zusätzlich* ***total*** *ist.*

3.1.3 Abbildungen

Definition 3.13 *Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **funktional**, wenn für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert, so dass $(a, b) \in R$ gilt. In Symbolen:*

$$(\forall a \in A \exists! b \in B | (a, b) \in R)$$

Definition 3.14 *Eine **Abbildung** $A \to B$ von einer Menge A in eine Menge B ist eine funktionale Relation in $A \times B$.*

Definition 3.15 *Wir denfinieren die **Komposition***

$$G \circ F := \{(a, c) \in A \times C | (\exists b \in B | (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G)\}.$$

Definition 3.16 *Die Komposition $h := g \circ f$ wird durch*

$$\Gamma_h := \Gamma_g \circ \Gamma_f$$

definiert.

Definition 3.17 *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.*

1. *f heißt **injektiv**, wenn für alle $x, y \in A$ aus $f(x) = f(y)$ die Relation $x = y$ folgt.*
2. *f heitßt **surjektiv**, wenn für alle $b \in B$ ein $a \in A$ existiert, mit f(a)=b*
3. *f heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

Definition 3.18 *Sei $f : A \to B$ bijektiv. Die **Umkehrabbildung** (inverse Abbildung) von f ist die Abbildung $f^{-1} : B \to A$ mi $\Gamma_{f^{-1}} := \Gamma_f^{op}$*

Definition 3.19 *Seien $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$. Wir setzen*

$$f(X) := \{b \in B | (\exists a \in X | b = f(a))\} \subseteq B$$

und

$$f^{-1}(X) := \{a \in A | f(a) \in Y\} \subseteq A$$

*Insbesondere ist $im(f) := f(A)$ das **Bild** von f.*

Definition 3.20 *Eine durch I induzierte **Familie** (von Elementen einer Menge U) ist eine Abbildung $x : I \to U$.*
Wir schreiben Familien oft in der Form $(x_i)_{i \in I}$.

Definition 3.21 *Eine **Folge** in U ist eine Familie mit der Indexmenge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.*

Definition 3.22 *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Wir definieren die Vereinigung $\cup_{i \in I} X_i$ und den Durchschnitt $\cap_{i \in I} X_i$ der Familie durch*

$$(x \in \cup_{i \in I} X_i) := (\exists i \in I | x \in X_i)$$

$$(x \in \cup_{i \in I} X_i) := (\forall i \in I | x \in X_i)$$

Definition 3.23 *Das **karthesische Produkt** $\times_{i \in I} X_i$ ist die Menge aller Familien $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$ für alle $i \in I$.*

3.1.4 Unendlichkeit

Definition 3.24 *Wir definieren*

$$\begin{aligned}
&1 := \emptyset^+ = \{\emptyset\}\\
&2 := 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\\
&3 := 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\\
&\vdots\\
&n+1 := n^+
\end{aligned}$$

Definition 3.25 *Eine **Nachfolgermenge** ist eine Menge, welche $\emptyset$ und mit jedem Element auch dessen Nachfolger enthält.*

Definition 3.26 *Eine Menge X hat n **Elemente**, wenn es eine Bijektion $X \to n$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $\sharp X := n$ für die **Anzahl der Elemente** von X.*

Definition 3.27 *Eine Menge A ist **unendlich**, wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to A$ mit $f(A) \neq A$ gibt. Die Menge A heißt **endlich** wenn sie nicht unendlich ist.*

Definition 3.28 *Die Menge Y ist **mächtiger** als X, wenn es eine injektive Abbildung $X \to Y$ gibt. Wir schreiben $X \preceq Y$.*
*Die Menge X ist zu Y **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion zwischen X und Y gibt. Wir schreiben $X \sim Y$.*

Satz 3.1 (Schröder-Bernstein) *Aus $X \preceq Y$ und $Y \preceq X$ folgt $X \sim Y$.*

Satz 3.2 (Cantor) *Für jede Menge X gilt $X \prec P(X)$.*

Definition 3.29 *Eine Menge X heißt **abzählbar** (unendlich), wenn $X \preceq \mathbb{N}$ ($X \sim \mathbb{N}$) gilt. Wenn $\mathbb{N} \prec X$ gilt, dann heißt X **überabzälbar**.*

3.2 Die reellen Zahlen

3.2.1 Die reellen Zahlen

Definition 3.30 *Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **geordnet**, wenn auf $\mathbb{K}$ eine Ordnungsrelation $\leq$ definiert ist, die die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *$\leq$ ist mit der Addition verträglich: Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$*
2. *$\leq$ ist mit der Multiplikation verträglich: Aus $0 \leq x$ und $0 \leq y$ folgt $0 \leq xy$*

Definition 3.31 *Ein **Schnitt** von $\mathbb{Q}$ ist eine nichtleere Teilmenge $U \subset \mathbb{Q}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *U ist von oben beschränkt, d.h. es gibt eine rationale Zahl r, so dass aus $q \in U$ die Ungleichung $q < r$ folgt.*

2. *Ist $q \in U$ und $r < q$, dann gilt $r \in U$.*

3. *Für jedes $q \in U$ existiert ein $r \in U$ mit $q < r$.*

Definition 3.32 *Eine **reelle Zahl** ist ein Schnitt von $\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$.*

3.2.2 Supremumseigenschaft - Definition von $\mathbb{R}$

Definition 3.33 *Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt (von oben) **beschränkt**, wenn es ein $m \in M$ gibt, so dass $u \leq m$ für alle $u \in U$ gilt. Ein solches Element m heißt **obere Schranke** von U.*

Definition 3.34 *Ein Element $m \in M$ heißt **kleinste obere Schranke**, wenn für jede obere Schranke n von U die Relation $m \leq n$ gilt. Wir schreiben $\sup U := m$ und nennen dieses Element das **Supremum** von U.*

Auf analoge Weise definieren wir Begriffe wie „**von unten beschränkt**„, „**untere Schranke**„und „**größte untere Schranke**„, welche wir mit inf U bezeichnen und das **Infimum** von U nennen.

Definition 3.35 *Wenn sup $U \in U$, dann ist sup U das **Maximum** von U welches wir auch mit max U bezeichnen. Analog definieren wir das **Minimum**, min U von U.*

Definition 3.36 *Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen geordneten Mengen heißt **monoton** (wachsend), wenn aus $x, y \in M$ und $x \leq y$ folgt $f(x) \leq f(y)$.*

Analog definieren wir monoton fallende Abbildungen.

Definition 3.37 *Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ hat die **Supremuseigenschaft**, wenn für jede nichtleere und von oben beschränkte Teilmenge $U \subset M$ ein Supremum in M existiert.*

Analog **Infimumseigenschaft**.

Definition 3.38 *Ein geordneter Körper, welcher die Supremumseigenschaft hat, ist ein Körper reeller Zahlen.*

Definition 3.39 *Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ ist **archimedisch** geordnet, wenn für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x < 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $nx > y$ ist.*

Satz 3.3 *Es gibt einen Körper reeller Zahlen. Für zwei Körper reeller Zahlen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}'$ gibt es genau einen Isomorphismus $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$ geordneter Körper.*

3.2.3 Potenzen, Dezimalbrüche, Überabzählbarkeit

Definition 3.40 *Für $p \in \mathbb{R}, p > 0$ definieren wir*

$$p^{1/n} := \sup\{q \in Q \mid q^n < p\}.$$

Satz 3.4 *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

3.2.4 Ungleichung, Betrag

Definition 3.41 *Für $a, b \in M$ definieren wir die* ***Intervalle***

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{m \in M \mid a \leq m \wedge m \leq b\} \\ (a,b] &:= \{m \in M \mid a < m \wedge m \leq b\} \\ [a,b) &:= \{m \in M \mid a \leq m \wedge m < b\} \\ (a,b) &:= \{m \in M \mid a < m \wedge m < b\} \end{aligned}$$

.

Definition 3.42 *Wir definieren die* ***Betrags****-Abbildung* $| \,..\, |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch*

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & : \; x \leq 0 \\ -x & : \; x < 0 \end{cases}.$$

Definition 3.43 *Wir betrachten $a, b \in \mathbb{R}$. Das* ***arithmetische Mittel*** *von a,b ist durch*

$$m_{arith}(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

definiert. Allgemeiner definiert man

$$m_{arith}(a_1, ..., a_n) := \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

für reelle Zahlen $a_i, i = 1, ..., n$.

Definition 3.44 *Das* ***geometrische Mittel*** *von positiven Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist durch*

$$m_{geom}(a,b) := (a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$$

definiert. Allgemeiner definiert man

$$m_{geom}(a_1, ..., a_n) := (\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}}$$

für positive reelle Zahlen $a_i, i = 1, ..., n$.

3.3 Grenzwerte und Folgen

3.3.1 Folgen reeller Zahlen

Definition 3.45 *Die Zahl a ist **Grenzwert** der Folge $(a_i)_{i=1}^{\infty}$, wenn für jede positive reelle Zahl ϵ eine natürliche Zahl N existiert, so dass für alle natürlichen Zahlen $i \geq N$ die Relation $\mid a_i - a \mid < \epsilon$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $a = lim_{i \to \infty} a_i$ oder $a_i \to a$ und sagen auch, dass (a_i) gegen a **konvergiert**.*

Definition 3.46 *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und*

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

eine Teilfolge von (a_n).

Definition 3.47 *Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **nach oben** (bzw. nach unten) **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$a_n \leq K \;\; (a_n \geq K) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

*Die Folge heißt **beschränkt**, wenn es eine reelle Konstante $M \geq 0$ gibt, so dass*

$$\mid a_n \mid \quad \forall n.$$

Definition 3.48 *Eine Folge reeller Zahlen (a_i) heißt **Cauchy-Folge**, wenn für alle $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m > N$ die Ungleichung*

$$\mid a_n - a_m \mid < \epsilon$$

gilt.

3.3.2 Reihen

Definition 3.49 *Wenn die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, dann machen wir folgende Definition:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n \to \infty} s_n.$$

*Wir sprechen dann von einer **konvergenten Reihe** $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$*

Definition 3.50 *Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ist **absolut konvergent**, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \mid a_i \mid$ konvergiert.*

Lemma 3.1 (Konvergenzkriterien)

1. *Quotientenkriterium: Eine Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert absolut, wenn*

$$\limsup_{i\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mid \frac{a_i}{a_{i+1}} \mid < 1$$

   gilt (die Existenz der linken Seite als Vorraussetzung eingeschlossen).

2. *Wurzelkriterium: Eine Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert absolut, wenn*

$$\limsup_{i\to\infty} \mid a_i \mid^{\frac{1}{i}}$$

   gilt.

3. *Majorantenkriterium: Die Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *konvergiert absolut, wenn es eine Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ *mit lauter nicht-negativen Gliedern gibt und* $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *eine Folge ist mit der Eigenschaft*

$$\mid a_i \mid \leq c_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

3.4 Stetigkeit

3.4.1 stetig reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$

Definition 3.51 *Eine Teilmenge* $U \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* ***offen****, wenn für jedes* $x \in U$ *ein* $\epsilon > 0$ *existiert, so dass* $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.
Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$ *heißt* ***abgeschlossen****, wenn ihr Komplement* $\mathbb{R}\backslash V$ *offen ist.*

Definition 3.52 *Eine* ***Umgebung*** *von* $x \in \mathbb{R}$ *ist eine Menge* $M \subset \mathbb{R}$*, für welche es eine offene Teilmenge* $U \subset \mathbb{R}$ *mit* $x \in U \subset M$ *gibt.*

Definition 3.53 *Eine Teilmenge* $V \subset A$ *ist* ***offen in A****, wenn sie von der Form* $V = A \cap U$ *für eine offene Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *ist. Eine Teilmenge* $B \subseteq A$ *ist* ***abgeschlossen in A****, wenn* $A\backslash B$ *offen ist. Sei* $x \in A$*. Eine Teilmenge* $M \subseteq A$ *ist eine* ***Umgebung*** *von x in A, wenn es eine Umgebung N von* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $M = A \cap N$ *gibt.*

Definition 3.54 (ϵ - δ - Definition) *:*
Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ *heißt* ***(metrisch) stetig*** *in x, wenn für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass aus* $y \in A$ *und* $\mid y - x \mid < \delta$ *die Ungleichung* $\mid f(x) - f(y) \mid < \epsilon$ *folgt.*

Definition 3.55 (Folgenstetigkeit) *:*
Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ *heißt* ***folgenstetig*** *in* $x \in A$*, wenn für jede Folge* (x_n) *mit* $x_n \in A$ *und* $\lim_{n\to\infty} = x$ *auch* $(f(x_n))$ *konvergiert und* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *gilt.*

Definition 3.56 (Topologische Definition) *:*
Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt ***(topologisch) stetig*** *in $x \in A$, wenn für jede Umgebung $N \subseteq \mathbb{R}$ von f(x) das Urbild $f^{-1}(N) \subseteq A$ eine Umgebung von $x \in A$ ist.*

Satz 3.5 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *f ist in x (metrisch) stetig*
2. *f ist in x folgenstetig*
3. *f ist in x (topologisch) stetig*

Definition 3.57 *Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt* ***stetig****, wenn sie in allen Punkten von A stetig ist.*

3.4.2 Zwischenwertsatz

Korollar 3.2 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $x \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (also $x \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]$). Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = x$.*

3.4.3 Abstand, metrische und topologische Räume

Definition 3.58 *Eine* ***Metrik*** *(oder Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

wobei x, y, z beliebige Punkte in X bezeichnen.

Definition 3.59 *Ein* ***metrischer Raum*** *ist ein Paar (X, d) aus eine Menge mit einer Abstandsfunktion.*

Im Folgenden sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.

Definition 3.60 *Eine Folge (x_n) in X konvergiert gegen $x \in X$, wenn $d(x_n, x) \to 0$ gilt.*

Verallgemeinerte Definition einer Cauchyfolge:

Definition 3.61 *Eine Folge (x_n) in X ist eine* ***Cauchyfolge****, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $n, m \geq n_0$ gilt $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Definition 3.62 *Wir nennen einen metrischen Raum **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.*

Definition 3.63 *Mit* $B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ *bezeichnen wir den **Ball** um* x *mit dem Radius* r.

Definition 3.64 *Wir nennen eine Menge* $U \subseteq X$ ***offen**, wenn für* $x \in U$ *ein* $r > 0$ *existiert mit* $B(x, r) \subseteq U$. *Eine Menge* $A \subseteq X$ *heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement* $X \backslash A$ *offen ist. Die Menge* $T := \{U \in P(X) \mid U \text{ ist offen}\}$ *heißt die von* d *auf* X ***induzierte Topologie**.*

Definition 3.65 *Die Metriken heißen **äquivalent**, wenn es ein* $c, C > 0$ *mit* $c, C \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass für alle* $x, y \in X$ *gilt:*

$$cd_0(x, y) \leq d_1(x, y) \leq Cd_0(x, y)$$

Definition 3.66 *Eine **Topologie** auf einer Menge* X *ist eine Teilmenge* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *mit:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}$ *is abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten*
3. $\mathcal{T}$ *ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen*

*Ein **topologischer Raum** ist ein Paar* $(X, \mathcal{T})$ *aus einer Menge* X *und einer Topologie* $\mathcal{T}$ *auf* X.

3.4.4 Konvergenz im metrischen und topologischen Kontext

Definition 3.67 *Eine Menge* $M \subseteq X$ *ist eine **Umgebung** von* $x \in X$, *wenn es eine offene Teilmenge* $U \in \mathcal{T}$ *mit* $x \in U \subseteq M$ *gibt.*

Definition 3.68 *Eine Folge* (x_n) *in einem topologischen Raum* $(X, \mathcal{T})$ ***konvergiert (topologisch)** gegen* $x \in X$, *falls für jede Umgebung* M *von* x *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $x_n \in M$ *für alle* $n \geq n_0$ *gilt.*

Definition 3.69 *Ein topologischer Raum* X *ist **Hausdorffsch**, wenn für alle* $x, y \in X$ *mit* $x \neq y$ *Umgebungen M,N von x,y existieren mit* $M \cap N = \emptyset$.

Definition 3.70 *Eine Teilmenge* $A \subset X$ *heißt **folgenabgeschlossen**, wenn für jede Folge* (a_i) *in* A *mit* $a_i \to x$ *auch* $x \in A$ *gilt.*

Definition 3.71 *Ein topologischer Raum heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in diesem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Definition 3.72 *Eine **Überdeckung** eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen mit $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.*
*Eine **Teilüberdeckung** von $(U_i)_{i \in I}$ ist eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I'}$ mit einer Teilmenge $I' \subseteq I$.*

Definition 3.73 *Ein topologischer Raum heißt **quasi-kompakt**, wenn jede Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wenn er zusätzlich Hausdorffsch ist, dann heißt er **kompakt**.*

Definition 3.74 *Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so bezeichnet*

$$\overline{A} := \{x \in A \mid \text{jede Umgebung von } x \text{ schneidet } A\}$$

die abgeschlossene Hülle von A.

Definition 3.75 *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt **beschränkt**, wenn sie in einem Ball enthalten ist.*

Lemma 3.2 *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie **beschränkt** und **abgeschlossen** ist.*

3.4.5 Stetigkeit im metrischen und topologischen Kontext

Definition 3.76 *Die Abbildung f ist an der Stelle x **folgenstetig**, wenn für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ auch $f(x_n) \to f(x)$ gilt.*

Definition 3.77 *Die Abbildung f ist an der Stelle x **(topologisch) stetig**, wenn für jede Umgebung M von f(x) in Y das Urbild $f^{-1}(M)$ eine Umgebung von x in X ist.*

Definition 3.78 *Die Abbildung f ist an der Stelle x **(metrisch) stetig**, wenn für jede Umgebung M von f(x) ein $\delta > 0$ exitsiert, so dass aus $d_X(u, x) < \delta$ folgt $f(u) \in M$.*

Definition 3.79 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räume ist stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.*

Korollar 3.3 *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihre Extremwerte an.*

Definition 3.80 *Seien X,Y metrische Räume mit Metriken d_X und d_Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_X(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

3.4.6 Grenzwerte

Definition 3.81 *Ein Punkt $x \in X$ heißt* ***Häufungspunkt*** *von E, wenn jede Umgebung von x in X einen nichtleeren Durchschnitt mit E hat.*

Definition 3.82 *Ein Punkt $y \in Y$ ist* ***Grenzwert von f in x****, wenn für jede Umgebung M von y in Y eine Umgebung N von x in X existiert mit $f(N \cap E) \subset M$. Wir schreiben*

$$y = \lim_{e \to x} f(e).$$

Definition 3.83 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $u \in U$. Wir betrachten eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Dann ist*

$$\Delta_u(f)(x) := \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

auf $U \backslash \{n\}$ definiert und heißt ***Differenzenquotient****.*
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to u} \Delta_u(f)$$

so heißt f an der Stelle u ***differenzierbar****, und $f'(x) := \lim_{x \to u} \Delta_u(f)$ die* ***Ableitung*** *an der Stelle u.*

3.4.7 Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz

Definition 3.84 *Eine Folge von Funktionen (f_n), $f_n : A \to \mathbb{R}$* ***konvergiert punktweise*** *gegen $f : A \to \mathbb{R}$, falls für alle $a \in A$*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$$

gilt.

Definition 3.85 *Eine Folge von Funktionen (f_n)* ***konvergiert gleichmäßig*** *gegen f, falls*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{a \in A} d(f_n(a), f(a)) = 0$$

gilt. Eine Folge von Funktionen (f_n) ist eine gleichmäßige Cauchyfolge, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass aus $n, m \geq n_0$ folgt

$$\sup_{a \in A} d(f_n(a), f_m(a)) < \epsilon.$$

Korollar 3.4 *Die Funktionen $x \mapsto sin(x), x \mapsto cos(x), x \mapsto e^x$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $(-1, 1) \ni x \mapsto ln(1 - x)$ ist stetig. (vgl. mit Definition 3.89)*

3.5 Differentialrechnung

3.5.1 Die Ableitung

Definition 3.86 *Wenn*

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(y)}{y - x}$$

existiert, dann heißt f im Punkt x ***differenzierbar*** *und f′(x) die* ***Ableitung*** *von f im Punkt x. Wenn f in allen Punkten von U differenzierbar ist, dann sagen wir, dass f auf U differenzierbar ist und nennen die Funktion* $f' : U \to \mathbb{R}$ *die Ableitung.*

3.5.2 Mittelwerte und Extremwerte

Definition 3.87 *Wir sagen, dass f im Punkt* $x \in X$ *ein* ***lokales Extremum*** *besitzt, wenn es eine Umgebung* $x \in U \subseteq X$ *von x gibt mit* $\sup_U f = f(x)$*. Analog definieren wir den Begriff eines* ***lokalen Minimums****.*

Definition 3.88 *Ist* $U \subseteq \mathbb{R}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, dann heißt ein Punkt* $x \in U$ *kritisch (für f), wenn* $f'(x) = 0$ *gilt.*

Korollar 3.5 *f hat im Punkt x ein lokales Maximum (Minimum), wenn*

1. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar*
2. $x \in (a, b)$ *ein kritischer Punkt von f (f′(x)=0)*
3. *f′ ist in x differenzierbar und* $f''(x) < 0$ (> 0)

3.5.3 Die trigonometrischen Funktionen, lin. Differentialgleichungen

Definition 3.89 ***Definition einiger wichtiger Funktionen****:*

1. $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$*:*

$$\sin(x) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

2. $\cos : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$*:*

$$\cos(x) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

3. $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$:

$$e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i)!}$$

Definition 3.90 *Wir definieren die Zahl*

$$\pi := 2 \inf\{x \in [0, \infty) \mid \cos(x) = 0\}.$$

Definition 3.91 *Die Umkehrfunktion der Abbildung* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ist die Funktion arcsin* $: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Die Ableitung ist gegeben durch

$$\arcsin'(sin(x)) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Für $\sin(x) = z$ *erhalten wir* $\cos(x) = \sqrt{1 - z^2}$, *und somit:*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

.

3.5.4 Taylorformel

Definition 3.92 *Das **Taylorpolynom** von f im Punkt x vom Grad n ist*

$$P(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k.$$

Im allgemeinen gilt:

$$f(y) = P(y) + r(y)$$

Satz 3.6 *(Taylorformel) Sei* $[a, b] \subset U$ *mit* $a < x < b$. *Wir machen folgende Annahmen über* $f : U \to \mathbb{R}$:

1. *Auf U ist f n-mal differenzierbar*

2. $f^{(n)}$ *ist auf [a,b] stetig*

3. $f^{(n+1)}$ *existiert auf (a,b)*

Dann gibt es für jedes $x \neq y \in (a, b)$ *ein* $\xi \in (x, y)$ *(oder* $\xi \in (y, x)$*, falls* $y < x$*), so dass*

$$r(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(y - x)^{n+1}.$$

Definition 3.93 *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **glatt**, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist.*

Definition 3.94 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Die Funktion f heißt in x **analytisch**, wenn es eine Umgebung $x \in V \subseteq U$ von x gibt derart, dass*

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k$$

für alle $y \in V$ gilt (auf welcher also f durch die Taylorreihe dargestellt wird).

3.6 Integration

3.6.1 Definition und Existenz des Integrals

Definition 3.95 *Eine Funktion $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **einfach**, wenn es eine Folge $a = x_0 \leq x_1 \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ (zulässige Zerlegung) gibt, so dass*

$$\phi(x) := \phi(x_{i-1}) \;\; \forall x \in [x_{i-1}, x_i) \;\; i = 1, \ldots, n$$

gilt.

Definition 3.96 *Wir definieren das Integral einfacher Funktionen*

$$\int_a^b \ldots dx : \; \epsilon[a,b] \to \mathbb{R}$$

durch

$$\int_a^b \phi(x)dx := \sum_{i=1}^{n} \phi(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

für eine zulässige Zerlegung für ϕ.
mit $\epsilon[a,b]$ bezeichnet man den Raum der einfachen Funktionen.

Definition 3.97 *Wir definieren das **Oberintegral** und **Unterintegral** von f durch*

$$\int_a^{b*} f(x)dx := \inf_{\psi \in \epsilon[a,b], f \leq \psi} \int_a^b \psi(x)dx$$

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx := \inf_{\psi \in \epsilon[a,b], f \geq \psi} \int_a^b \psi(x)dx$$

Definition 3.98 *Wir nennen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **riemannintegrierbar**, wenn das Oberintegral und das Unterintegral den gleichen Wert hat. In diesem Fall ist*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{a*}^b f(x)dx = \int_a^{b*} f(x)dx$$

*das **Riemannintegral** von f. Mit $R[a,b]$ bezeichnen wir die Menge der riemannintegrierbaren Funktionen auf $[a,b]$.*

Satz 3.7 *Es gilt $C([a,b]) \subset R[a,b]$.*

Definition 3.99 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist **stückweise stetig**, wenn es eine Zerlegung $[a,b] = \sqcup_{i=1}^n I_i$ in endlich viele echte Intervalle gibt, so dass $f_{|I_i}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ stetig ist.*

3.6.2 Der Haupsatz

Satz 3.8 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir bilden die Funktion $[a,b] \ni x \mapsto F(x) := \int_a^x f(x)dx$. Dann ist F stetig auf (a,b) differenzierbar und es gilt:*

$$F'(x) = f(x)\ ,\ F(a) = 0$$

Definition 3.100 *Eine auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn auf (a, b) gilt: $F' = f$.*

Korollar 3.6 *Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

3.6.3 Uneigentliche Integrale

Definition 3.101 *Wenn $\lim_{c\to b} \int_a^x f(x)dx$ existiert, dann heißt dieser Wert*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b} \int_a^x f(x)dx$$

uneigentliches Integral von f. Analog definiert man das uneigentliche Integral einer Funk- tion $(a,b] \to \infty$. Das uneigentliche Integral einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist definiert als Summe uneigenlicher Integrale (falls diese existieren)

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

für ein $c \in [a,b]$.

3.6.4 Partielle Integration, Substitution

Satz 3.9 (partielle Integration) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $[a,b] \subset U$ und $F, G : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f := F', g := G'$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = FG\,|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$$

wobei $FG\,|_a^b := F(b)G(b) - F(a)G(a)$ ist.

3.6.5 Bogenlänge

Sei $I := [0,1]$. Da I nicht offen ist, benutzen wir für I folgende Erweiterung des Begriffs einer differenzierbaren Funktion.

Definition 3.102 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, wenn sie Einschränkung einer auf einer offenen Umgebung von I definierten differenzierbaren Funktion ist.*

Definition 3.103 *Wir betrachten f als differenzierbar wenn die f_i für $i = 1, \ldots, n$ differenzierbar sind und setzen $f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$.*

Definition 3.104 *Ein **parametrisierter Weg** in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Mit $P\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Menge der Wege in $\mathbb{R}^n$.*

Definition 3.105 *Es gilt $\gamma_0 \sim_{C^1} \gamma_1$ genau dann, wenn es einen Homöomorphismus $\phi : I \to I$ gibt mit*

$$\gamma_0 = \gamma_1 \circ \phi.$$

Definition 3.106 *Ein **differenzierbarer parametrisierter Weg** in $\mathbb{R}$ ist eine stetig diffrenzierbare Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Mit $P_{C^1}\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Menge der differenzierbaren Wege in $\mathbb{R}^n$.*

Definition 3.107 *Es gilt $\gamma_0 \sim_{C^1} \gamma_1$ genau dann, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi : I \to I$ gibt mit $\phi' > 0$ und*

$$\gamma_0 = \gamma_1 \circ \phi.$$

Definition 3.108 *Wir definieren die **Länge** von γ durch*

$$L(\gamma) := \int_0^1 ||\gamma'||dt.$$

Satz 3.10 *Gilt für $\gamma_0, \gamma_1 \in P_{C^1}\mathbb{R}$ die Relation $\gamma_0 \sim_{C^1} \gamma_1$, dann ist $L(\gamma_0) = L(\gamma_1)$.*

3.7 Funktionalanalytische Aspekte

3.7.1 Funktionenräume, Vervollständigungen

Definition 3.109 *Ein normierter Vektorraum* $(E, \|.\|)$ *(über* $\mathbb{R}$*), welcher als metrischer Raum* $(mit d(x,y) := \|x-y\|)$ *vollständig ist, heißt* ***reeller Banachraum****.*

Definition 3.110 *Eine* ***Vervollständigung*** *von* (X, d_X) *ist ein Paar* $((Y, d_Y), i)$ *aus einem vollständigen metrischen Raum* (Y, d) *und einer isometrischen Abbildung* $i : X \to Y$ *derart, dass für jede lipschitzstetige Abbildung* $f : X \to Z$ *in einen vollständigen metrischen Raum* Z

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

eine eindeutige stetige Faktorisierung g *existiert.*

Satz 3.11 *Jeder metrische Raum besitzt eine Vervollständigung* $i : X \to Y$ *. Dabei ist* $i(X) \subset Y$ *dicht. Sind* $((Y, d_Y), i)$ *und* $((Y'; d_{Y'}), i')$ *zwei Vervollständigungen, dann gibt es eine eindeutige isometrische Isomorphie* $j : Y \to Y'$ *so dass*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & Y' \arrow[dl, "i'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3.7.2 Der Satz von Ascoli

Definition 3.111 *Eine Teilmenge* $F \subseteq C(X, B)$ *heißt* ***gleichgradig stetig*** *im Punkt* $x \in X$*, falls für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass aus* $f \in F$*,* $y \in X$ *und* $d_X(x, y) < \delta$ *die Ungleichung* $d_B(f(x), f(y)) < \epsilon$ *folgt. Ist* F *in jedem Punkt von* X *gleichgradig stetig, dann ist* F *gleichgradig stetig.*

Satz 3.12 (Ascoli) *Sei* (X, d_X) *eine kompakter metrischer Raum und* (B, d_B) *ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge* $F \subseteq C(X, B)$ *ist genau dann relativ kompakt, wenn* F *gleichgradig stetig und für jedes* $x \in X$ *die Menge* $\{f(x) \mid f \in F\} \subseteq B$ *relativ kompakt ist.*

Korollar 3.7 *Sei* (X, d_Y) *ein kompakter metrischer Raum. Eine beschränkte gleichgradig stetige Teilmenge* $F \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ *ist relativ kompakt.*

Kapitel 4

Zusammenfassung Analysis 2

4.1 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

4.1.1 Der $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum

Satz 4.1 *Sei $x_\nu = (x_{1\nu}, ..., x_{n\nu}), \nu \in \mathbb{N}$, eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Folge x_ν konvergiert.*
2. *Jede Komponentfolge $x_{i\nu}, i \in \{1, ..., n\}, \nu \in \mathbb{N}$ konvergiert.*
3. *Die Folge x_ν ist eine Cauchyfolge.*

Korollar 4.1 *Eine Folge $(x_{1\nu}, ..., x_{n\nu})$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn für $i = 1, ..., n$ die reelle Zahlenfolge $x_{i\nu}$ gegen x_i konvergiert.*

Satz 4.2 *Sei X ein metrischer Raum und seien $f : X \to \mathbb{R}$ für $i : 1, ..., n$ Abbildungen. Die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n, f(x) := (f_1(x), ..., f_n(x))$ ist genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen stetig sind.*

Satz 4.3 *Seien nun V und W normierte reelle Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. A ist genau dann stetig, wenn es beschränkt ist, das heißt wenn es ein $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass $||A(x)|| \leq C||x||$ für alle $x \in V$.*

Definition 4.1 *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X (z.B. $\mathbb{R}^n$). Unter einer **offenen Überdeckung** von A versteht man eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Die Indexmenge kann dabei endlich oder unendlich sein.*

4.1.2 Kompaktheit

Definition 4.2 *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X (z.B. $\mathbb{R}^n$). Unter einer* ***offenen Überdeckung von*** *A versteht man eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq X$, so dass $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Die Indexmenge kann dabei endlich oder unendlich sein.*

Definition 4.3 *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt* ***kompakt****, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Genauer: A heißt kompakt, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A endlich viele Indizes $i_1, ..., i_k$ gibt, so dass $A \subseteq U_{i_1} \cap ... \cap U_{i_k}$ gilt.*

Beachte *Die Definition sagt nicht: A ist kompakt, wenn es eine endliche Überdeckung mit offenen Teilmengen gibt. (Die gibt es nämlich immer, z.B. X ist offen!)*

Satz 4.4 *Sei X ein metrischer Raum, a_ν eine konvergente Folge und a der Grenzwert. Dann ist $A := \{a_\nu | \nu \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt.*

Satz 4.5 *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist, d.h. wenn jede Folge eine in diesem Raum konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 4.6 (Heine-Borel) *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Satz 4.7 *Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und X kompakt, so ist $f(x) \subseteq Y$ kompakt.*

Korollar 4.2 *Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

4.1.3 Partielle Ableitungen

Definition 4.4 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in U$. Die Funktion f heißt* ***im Punkt*** *$x \in U$* ***partiell differentierbar*** *bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung, falls die Funktion $t \mapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)$ bei $t = x_i$ differenzierbar ist (im gewöhnlichen Sinne - als eindimensionale reelle Funktion). In diesem Fall nennt man den Wert der Ableitung der obigen eindimensionalen Funktion $t = x_1$, die i-te partielle Ableitung von f in x. Bezeichnung:*

$$D_i f(x) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Definition 4.5 *Sei f wie in Definition 4.4. f heißt* ***partiell differenzierbar****, falls für alle $x \in U$ und alle $i = 1, ..., n$ die Funktion f in x partiell differenzierbar bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung ist. f heißt* ***stetig partiell differenzierbar****, falls zusätzlich alle partiellen Ableitungen $D_i f := \frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}, x \mapsto D_i f(x)$ stetig sind.*

Definition 4.6 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Funktion. Wir nennen den Vektor*

$$grad(f(x)) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$$

*den **Gradient** von f im Punkt ($x \in Y$). Andere Schreibweise $\nabla f(x)$ („Nabla").*

Definition 4.7 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter einem **Vektorfeld** versteht man eine Abbildung*

$$v : U \to \mathbb{R}^n$$

die also jedem Punkt $x \in U$ einem Vektor $v(x)$ in $\mathbb{R}^n$ zuordnet. Ein spezielles Vektorfeld ist der Gradient einer partiell differenzierbaren Funktion

$$\nabla f : U \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \nabla f(x)$$

Definition 4.8 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $v = (v_1, ..., v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein partiell differenzierbares Vektorfeld (d.h. alle Komponentenfunktionen $v_i : U \to \mathbb{R}$ sind partiell differenzierbar). Dann heißt die Funktion*

$$div(v) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

*die **Divergenz** des Vektorfeldes v.*

Satz 4.8 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $a \in U$ und $i, j = 1, ..., n$*

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a)$$

Definition 4.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Setze*

$$\Delta f := div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

*wobei Δ der **Laplace-Operator** ist.*

4.1.4 Totale Differenzierbarkeit

Definition 4.10 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, f heißt im Punkt $x \in U$ **total differenzierbar** (oder Differenzierbar), falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, die f in der Nähe des Punktes x in folgenden Sinne approximiert. Es gibt eine Umgebung von x, in der gilt*

$$f(x + \xi) = f(x) + A(\xi) + \varphi(\xi)$$

Wobei φ eine in einer Umgebung der Null in $\mathbb{R}^n$ definierten Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^n$ ist, so dass

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{||\xi||} = 0$$

Satz 4.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die im Punkt $x \in U$ differenzierbar ist, so dass*

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + o(||\xi||)$$

mit der reellen $m \times n$-Matrix A. Dann sind alle Komponenten von f partiell differenzierbar in x und es gilt:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

Insbesondere ist die Matrix A durch f eindeutig festgelegt.

Definition 4.11 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkt $x \in U$ partiell differenzierbar ist. Dann nennt man die Matrix*

$$Df(x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$$

die aus den partiellen Ableitungen von f bei x gebildet wird die ***Jacobi-Matrix*** *als Funktionalmatrix von f bei x. Andere Schreibweisen:*

$$Df(x) = J_f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(x)$$

Ist f bei x differenzierbar, so nennt man $Df(x)$ auch das ***Differential*** *oder die Ableitung von f bei x.*

Satz 4.10 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine in U partiell differenzierbare Funktion. Alle partiellen Ableitungen $D_i f$ seien im Punkte $x \in U$ stetig. Dann ist f in x (total) differenzierbar.*

Satz 4.11 (Kettenregel) *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : U \to \mathbb{R}^m, f : V \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen mit $g(U) \subseteq V$. Die Abbildung g sei im Punkt $x \in U$ differenzierbar und die Abbildung f im Punkt $y := g(x)$ differenzierbar. Dann ist die Verkettung*

$$f \circ g : U \to \mathbb{R}^k, x \mapsto f(g(x))$$

im Punkt x differenzierbar und es gilt für ihre Ableitung

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x), (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Wobei die Multiplikation auf der rechten Seite Matrizenmultiplikation (bzw. Verkettung von linearen Abbildungen) bezeichnet.

Definition 4.12 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Sei weiter $x \in U$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der* ***Richtungsableitung von f bei x in Richtung v*** *versteht man (im Fall der Existenz) den Wert:*

$$D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tv)|_{t=0}$$

Für $v = e_i$ ist also $D_v f(x) = D_{e_i} f(x) = D_i f(x)$ die i-te partielle Ableitung.

Satz 4.12 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare Ableitung. Dann gilt für jedes $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$*

$$\underbrace{D_v f(x)}_{\text{Richtungsableitung}} = \underbrace{Df(x)v}_{\text{Matrix mal Vektor}}$$

Ist insbesondere $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so gilt:

$$D_v f(x) = \langle v, \nabla f(x) \rangle$$

Satz 4.13 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetige differenzierbare Abbildung. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die ganze Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$ in U liegt. Dann gilt:*

$$f(x+\xi) - f(x) = \int_0^1 Df(x+t\xi)dt\xi$$

Definition 4.13 *Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ eine stetige (beschränkte) lineare Abbildung. Die* ***Norm einer linearen Abbildung*** *definiert man als*

$$||A|| := \sup\{||A(v)|| \ | \ v \in V, ||v|| \leq 1\}$$

Korollar 4.3 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die ganze Strecke $x + t\xi$, $0 \leq t \leq 1$ in U liegt. Dann gilt:*

$$||f(x+\xi) - f(x)|| \leq M||\xi||$$

Wobei

$$M := \sup_{t \in [0,1]} ||Df(x+t\xi)||$$

die Norm der Matrix darstellt.

4.1.5 Taylorformel und lokale Extrema

Satz 4.14 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass die Strecke $x + t\xi, 0 \leq t \leq 1$ ganz in U liegt. Dann ist die Funktion*

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R},\ g(t) := f(x + t\xi)$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$g(t) = \frac{d^k g}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha$$

Die Summe läuft hier über alle n-Tupel mit $|\alpha| = k$.

Definition 4.14 *Wir setzen für $m \in \mathbb{N}$:*

$$P_m(\xi) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha$$

Dann ist P_m ein (homogenes) Polynom (m-ten Grades) in der Variablen $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen

$$T_m(\xi) := \sum_{k=0}^{m} P_k(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha$$

*das **Taylorpolynom m-ten Grades** von f im Punkt x. Für $n = 1$ liefert dies das aus Analysis I bekannte Taylorpolynom für Funktionen einer Variablen, so dass dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}t^k$$

Satz 4.15 (Taylorformel) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t\xi \in U\ \forall t \in [0; 1)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(k + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, dann existiert ein $\theta \in [0, 1]$, so dass*

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha$$

Korollar 4.4 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $||\xi|| < \delta$:*

$$f(x + y) = \sum_{m=0}^{k} P_m(\xi) + o(||\xi||^k)$$

Definition 4.15 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Unter der* ***Hesseschen Matrix*** *(oder Hesse-Matrix) versteht man die nxn-Matrix:*

$$((Hess f)(x))_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ 1 \leq i, j \leq n$$

Wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen ist die Hessesche Matrix symmetrisch, das heißt:

$$((Hess f)(x))^T = ((Hess f)(x))$$

Korollar 4.5 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$. Dann gilt:*

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle (Hess f)(x)\xi, \xi \rangle + o(\|\xi\|^2)$$

Definition 4.16 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in U$ heißt* ***lokales Maximum*** *(bzw. lokales Minimum) von f, falls es eine Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt $f(y) \leq f(x)$ (bzw. $f(y) \geq f(x)$) $\forall y \in V$.*
Ein Punkt $x \in U$ heißt ***isoliertes lokales Maximum****, falls es eine Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt, so dass $f(y) < f(x) \forall y \in V \setminus \{x\}$. Ein* ***lokales Extremum*** *ist ein lokales Maximum oder Minimum.*

Satz 4.16 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und besitze die partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ bei x ein lokales Extrema. Dann gilt:*

$$\nabla f(x) = 0$$

Definition 4.17 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Die Punkte $x \in U$ mit $0 = \nabla f(x)$ nennen wir* ***kritische Punkte der Funktion f****.*

Wiederholung *Eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix A heißt:*

- ***positiv definit****, falls $\langle A\xi, \xi \rangle > 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
- ***negativ definit****, falls $\langle A\xi, \xi \rangle < 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
- ***positiv semidefinit****, falls $\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- ***negativ semidefinit****, falls $\langle A\xi, \xi \rangle \leq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$*
- ***indefinit****, falls es $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle A\xi, \xi \rangle > 0$ und $\langle A\eta, \eta \rangle < 0$.*

Satz 4.17 *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und haben f bei $x \in U$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum). Dann ist $((\text{Hess} f)(x))$ negativ semidefinit (bzw. positiv semidefinit), das heißt es gilt:*

$$\langle (\text{Hess} f)(x)\xi, \xi\rangle \leq 0 \ (\geq 0) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Satz 4.18 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Habe f bei x einen kritischen Punkt und sei Hessematrix $(\text{Hess} f)(x)$ bei x positiv (bzw. negativ) definit. Dann hat f bei x ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum).*

Bemerkung *Sei $A \in Mat(n, n; \mathbb{R})$ eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Stellen wir einen Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Basis dar als*

$$\xi = \xi_1 v_1 + ...\xi_n v_n$$

so folgt

$$\langle \xi, A\xi\rangle = \langle \xi_1 v_1 + ... + \xi_n v_n, \lambda_1 \xi_1 v_1 + ... + \lambda_n \xi_n v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2$$

Daran sieht man, dass A genau dann

- *positiv definit ist, wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$*
- *negativ definit ist, wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n < 0$*
- *positiv semidefinit ist, wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$*
- *negativ semidefinit ist, wenn $\lambda_1, ..., \lambda_n \leq 0$*
- *indefinit ist, falls es einen positiven und negativen Eigenwert gibt*

Satz 4.19 (Hurwitz) *Sei $A \in Mat(n, n; \mathbb{R})$ eine reelle symmetrische Matrix. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn gilt:*
Die Determinanten $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ sind für $k = 1, ..., n$ alle positiv. Da A genau dann negativ definit ist, wenn $-A$ positiv ist, folgt sofort:
A ist genau dann negativ definit wenn die Determinanten positiv sind für gerade k und negativ für ungerade.

$$\det \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & \dots & -a_{kk} \end{pmatrix} = (-1)^k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Warnung *Ersetzt man „definit" durch „semidefinit" in diesem Satz, so gilt nur noch die „$\Rightarrow$" Richtung.*

4.1.6 Banachscher Fixpunktsatz, implizite Funktionen, Umkehrsatz

Definition 4.18 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt* ***Lipschitz-stetig****, falls es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $d_y(f(x), f(y)) \leq C \cdot d_x(x, y)$ für alle $x, y \in X$, wobei d_x, d_y die Abstandsfunktionen auf X bzw. Y bezeichnet. Eine Abbildung heißt* ***kontrahierend*** *oder Kontraktion, falls die obige Bedingung für ein $C < 1$ erfüllt ist.*

Satz 4.20 (Banachscher Fixpunktsatz, Kontraktionsprinzip) *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Sei $x_0 \in X$ beliebig als Startwert und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv definiert durch $x_{n+1} := f(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann hat f genau einen Fixpunkt, das heißt es gibt genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$ und die Folge x_n konvergiert gegen x.*

Implizit definierte Funktionen *Unter einer* implizit definierten Funktion *versteht man eine Abbildung, die nicht durch eine* explizite *Abbildungsvorschrift, wie zum Beispiel $f(x) = 3x^2 + 5, y(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \end{pmatrix}, \ldots$ gegeben ist, sondern durch Gleichungen, wie zum Beispiel:*

$$f(x)\arctan(f(x) + x) = x^2 + x, f(x)^3 + x^5 = 1, \ldots$$

Satz 4.21 (Über implizite Funktionen) *Seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Mengen und*

$$F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$$
$$(x, y) \mapsto F(x, y)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ ein Punkt, so dass $F(a, b) = 0$ und die $m \times m$-Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von a und $V_2 \subseteq U_2$ von b und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V_1 \to V_2$, so dass gilt:

1. *$F(x, g(x)) = 0\ \forall x \in V_1$*
2. *Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x, y) = 0$, so folgt $y = g(x)$.*

Satz 4.22 (Umkehrsatz) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $a \in U$, $b := f(a)$. Die Jacobi-Matrix $Df(a)$ sei invertierbar. Dann* *gibt es offene Umgebungen U_1 von a und U_2 von b, so dass f die Mengen U_1 bijektiv auf U_2 abbildet und so, dass die Umkehrabbildung*

$$g := (f_{|U_1})^{-1} : U_2 \to U_1$$

stetig differenzierbar ist.

Satz 4.23 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und*

$$M := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

die Nullstellenmenge von f. Sei $a \in M$ ein Punkt mit $\nabla f(a) \neq 0$. Weiter sei $h : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die im Punkt a ein lokales Maximum (bzw. Minimum) unter der Nebenbedingung $f = 0$ besitze, das heißt es existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ mit $h(a) \geq h(x)$ $(\leq h(x))$ für alle $x \in M \cap V$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\nabla h(a) = \lambda \nabla f(a)$$

Man nennt λ den Lagrangeschen-Mulitplikator.

4.1.7 Parameterabhängige Integrale und Variationsrechnung

Satz 4.24 *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $y \in U$ sei $\varphi(y) := \int_a^b f(x, y)dx$. Dann ist die dadurch definierte Funktion $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig.*

Satz 4.25 *Seien I, J kompakte Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nach der zweiten Variablen stetig partiell differenzierbar ist. Für $y \in J$ definiere*

$$\varphi(y) := \int_I f(x, y)dx$$

Dann ist die Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Satz 4.26 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, die sternförmig bezüglich eines Punktes $a \in U$ ist, das heißt für jedes $x \in U$ liegt die Strecke zwischen a, x in U (also $a + t(x - a) \in U$ für alle $t \in [0, 1]$). Sei $v = (v_1, ..., v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld für das $D_i v_j(x) = D_j v_i(x)$ für alle $x \in U, i, j = 1, ...n$ gilt. Dann ist die durch*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 v_i(a + t(x - a))dt(x_i - a_i)$$

definierte Funktion stetig differenzierbar und es gilt:

$$\nabla f(x) = v(x), \ \forall x \in U$$

Doppel- und mehrfache Integrale *Seien* $[a, b] \subset \mathbb{R}, [c, d] \subset \mathbb{R}$ *zwei kompakte Intervalle und* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Nach Satz (4.24) ist die Funktion*

$$F(y) := \int_a^b f(x, y)dx$$

stetig auf $[c, d]$*. Daher existiert das* Doppelintegral

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy$$

Man könnte f aber zuerst bezüglich y und dann bezüglich x integrieren. Der folgende Satz zeigt, dass sich dabei der selbe Wert ergibt.

Satz 4.27 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$\int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx$$

Satz 4.28 *Seien* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und sei*

$$\mathfrak{F} := \{\varphi \in C^2([a, b]) \mid \varphi(a) = c, \varphi(b) = d\},$$

$L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und* $S(\varphi) := \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt$*. Falls* $S(\varphi) = \inf\{S(\psi) \mid \psi \in \mathfrak{F}\}$ *für ein* $\varphi \in \mathfrak{F}$ *gilt, dann erfüllt* φ *die* Eulersche Differentialgleichung*:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$$

Für alle $t \in [a, b]$*.*

4.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.2.1 Existenz und Eindeutigkeitssatz

Definition 4.19 *Sei U eine Teilmenge von* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *und* $f : U \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y),\ y = (y_1, ..., y_n)$ *eine stetige Abbildung. Dann nennt man*

$$y' = f(x, y)$$

ein ***System von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen erster Ordnung****, falls* $n = 1$*. Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}$ *definierte differenzierbare Funktion* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$*, so dass der Graph von* φ *in U enthalten ist, das heißt*

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}^n \mid y = \varphi(x)\}$$

und so dass $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ *für alle* $x \in I$ *gilt.*

Definition 4.20 *Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Man sagt f* ***genüge in U einer Lipschitz-Bedingung*** *mit der Lipschitz-Konstante L, wenn für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in U$ gilt:*

$$||f(x, y) - f(x, \tilde{y})|| \leq L||y - \tilde{y}||$$

Satz 4.29 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y)$$

auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gilt dann $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$ so folgt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 4.30 (Existenzsatz von Picard-Lindelöf) *Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jeden $(a, c) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung*

$$\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$$

der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$.

Definition 4.21 *Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

eine ***(gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung****. Unter einer Lösung versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert auf einem reellen Intervall I, so dass der Graph von φ in U enthalten ist und*

$$\varphi^{(n)} = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{n-1}(x))$$

für alle $x \in I$ gilt.

4.2.2 Elementare Lösungsmethoden

Lineare Differentialgleichungen

Definition 4.22 *Sei I ein reelles Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

eine lineare Differentialgleichung und zwar ***homogen****, falls $b \equiv 0$, sonst* ***inhomogen****.*

Satz 4.31 *Sei I ein reelles Intervall und sei $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung φ der Linearen homogenen Differentialgleichung*

$$y' = a(x)y$$

mit $\varphi(x_0) = c$, nämlich

$$\varphi(x) = c \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$$

Satz 4.32 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu einem beliebigen $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung:*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

die der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = c$ genügt, nämlich

$$\psi(x) = \varphi(x)\left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}dt\right)$$

Wobei $\varphi(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)dt)$ ist.

Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren

Definition 4.23 *Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Differentialgleichung*

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

*heißt **exakt**, falls es eine partiell differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto h(x, y)$ gibt, so dass $f(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$ und $g(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$ gilt.*

Bemerkung *Die obige Differentialgleichung $f + gy' = 0$ wird oft*

$$fdx + gdy = 0$$

geschrieben.

Korollar 4.6 *Mit Bezeichnungen wie in Definition 4.23 gilt: Ist $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sternförmig und sind f, g stetig differenzierbar, so ist die Differentialgleichung*

$$f + gy' = 0$$

exakt genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ für alle $(x, y) \in U$ kurz $f_y = g_x$ gilt.

Definition 4.24 *Mit den Bezeichnungen wie in Definition 4.23. Eine Überall auf U von Null verschiedenen Funktion $\mu : U \to \mathbb{R}$ heißt **integrierender Faktor** (auch Eulerscher Multiplikator) für Differentialgleichungen $f + gy' = 0$, wenn die dann äquivalente Differentialgleichungen $\mu f + \mu gy' = 0$ exakt ist, wenn also*

$$(\mu f)_y = \mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x = (\mu g)_x$$

gilt.

4.2.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 4.25 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, I \to Mat(n,n;\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung, das heißt alle Funktionen a_{ij} sind stetig. Dann heißt $y' = A(x)y$ ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem**. Sei weiter $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann heißt*

$$y' = A(x) + b(x)$$

*ein **inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem**.*

Satz 4.33 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $A : I \to Mat(n,n;\mathbb{K}), b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Abbildungen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n, y' = A(x)y + b(x)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$.*

Satz 4.34 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to Mat(n,n;\mathbb{K})$ stetig. Wir bezeichnen mit L_H die Menge der Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der homogenen lineare Differentialgleichung:*

$$y' = A(x)y$$

Dann ist L_H ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{K}$. Für ein k-Tupel $\varphi_1, ..., \varphi_k$, $k \leq n$ von Lösungen sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *$\varphi_1, ..., \varphi_k$ sind als Funktionen linear unabhängig über $\mathbb{K}$.*
2. *Es existiert ein $x_0 \in I$, so dass die Vektoren $\varphi_1(x_0), ..., \varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$ sind.*
3. *Für jedes $x_0 \in I$ sind die Vektoren $\varphi_1(x_0), ...\varphi_k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig.*

Kapitel 5

Analysis 3

5.1 Einführung in die komplexe Analysis

5.1.1 Die komplexen Zahlen

Definition 5.1 (Körper $\mathbb{C}$, Definition nach Hamilton) *Bezeichne mit $\mathbb{C}$ die Menge aller geordneten, reellen Zahlenpaare (a, b), versehen mit den beiden Operationen*

$$\begin{aligned} + : (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d), \\ \cdot : (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, bc + ad). \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper, genannt der* ***Körper der komplexen Zahlen****.*

Definition und Bemerkung

1. *Unter dem* ***(Absolut-)Betrag*** *einer komplexen Zahl $z = x + iy$ verstehen wir $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Der Betrag $|z|$ ist somit der euklidische Abstand des Punktes $z = (x, y)$ vom Ursprung $(0, 0)$. Elementare Eigenschaften sind:*

   $$|z\tilde{z}| = |z||\tilde{z}|,$$

   $$|z + \tilde{z}| \leq |z| + |\tilde{z}|.$$

   Es gilt noch zusätzlich:

   $$||z| - |\tilde{z}|| \leq |z + \tilde{z}| \leq |z| + |\tilde{z}|,$$

   Für alle Gleichungen gilt: $\forall z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$.

2. *Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$* ***konjugiert komplexe Zahl****. Man sieht sofort:*

   $$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Außerdem definiert die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ einem Homomorphismus auf dem Ring $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, denn

$$\begin{aligned} \overline{z+\tilde{z}} &= \bar{z}+\bar{\tilde{z}}, \\ \overline{z\cdot\tilde{z}} &= \bar{z}\cdot\bar{\tilde{z}}, \quad z,\tilde{z}\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Mit der Identität $z\bar{z} = |z|^2, (z \in \mathbb{C})$ können wir die Division zweier komplexer Zahlen $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$ auf elegante Art darstellen:

$$\frac{z}{\tilde{z}} = \frac{z\bar{\tilde{z}}}{\tilde{z}\bar{\tilde{z}}} = \frac{z\bar{\tilde{z}}}{|\tilde{z}|^2}.$$

Insbesondere gilt somit:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

3. *Anstatt der Angabe von Real- und Imaginärteil (x, y) können wir eine komplexe Zahl auch in **Polarkoordinaten** darstellen. Mit $r := |z|$ und $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ ist*

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

*Dabei ist das Argument φ von z nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt. Durch Einschränkung auf den **Hauptwert** $0 \leq \varphi < 2\pi$ wird die Polardarstellung für alle Zahlen $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eindeutig.*

*Die **Multiplikation** zweier Zahlen z und w ist in Polardarstellung besonders einfach. Mit $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ erhält man*

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \end{aligned}$$

*Speziell gilt die **Formel von de Moivre***

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

$\mathbb{C}$ als metrischer Raum *Bezüglich der durch den Abstand $|\cdot|$ induzierten Metrik $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ in $\mathbb{C}$ ist $(\mathbb{C}, d)$ ein metrischer Raum. Es gelten also für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) = 0 &\Leftrightarrow z_1 = z_2 \\ d(z_1, z_2) &= d(z_2, z_1) \\ d(z_1, z_3) &\leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \end{aligned}$$

Somit können wir sämtliche Begriffe des metrischen Raumes auch im Raum der komplexen Zahlen verstehen.

Definition 5.2 *Wir definieren die* ***Offene Kreisscheibe*** *mit Mittelpunkt z, Radius r.*

$$B(z, r) = B_r(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < r\}$$

und setzen speziell $\mathbb{E} := B(0, 1)$.

Definition 5.3

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ *heißt* ***offen****, falls zu jedem* $z \in U$ *ein Radius* $r > 0$ *existiert, so dass* $B(z, r) \subset U$ *gilt.*

2. $A \subseteq \mathbb{C}$ *heißt* ***abgeschlossen****, wenn das Komplement* $CA = \mathbb{C} \setminus A$ *offen ist.*

3. *Zu* $X \subset \mathbb{C}$ *setzen wir:*
   $\mathring{X} = \bigcup_{U \subseteq X} U$ *= Vereinigung aller offenen Teilmengen von X -* ***Inneres*** *von X.*
   $\overline{X} = \bigcap_{A \supseteq X} A$ *= Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von X -* ***Abschluss*** *von X.*
   $\delta X = \overline{X} \setminus \mathring{X}$ *= Der* ***Rand*** *von X.*

Definition 5.4

1. *Eine Folge* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ ***konvergiert gegen z*** $\in \mathbb{C}$*, falls gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, so dass* $|z_n - z| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq N$ *erfüllt ist. Schreibweise:*
   $$z = \lim_{n \to \infty} z_n \text{ oder } z_n \overset{n \to \infty}{\to} z$$

2. *Eine Folge* $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *heißt* ***Cauchy-Folge****, falls gilt: Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, so dass* $|z_n - z_m| < \varepsilon$ *für alle* $m, n \geq N$.

Definition 5.5

1. *Ein metrischer Raum X heißt* ***zusammenhängend****, falls gilt: Sind A, B nichtleer, offen in X mit* $A \cup B = X$*, so ist* $A \cap B \neq \emptyset$.

2. *Eine beliebige Teilmenge* $Z \subset \mathbb{C}$ *heißt* ***zusammenhängend****, falls Z als metrischer Raum, versehen mit der induzierten Metrik, zusammenhängend ist.*

Satz 5.1 *Sei G offen in* $\mathbb{C}$*. Dann gilt: G ist zusammenhängend* $\Leftrightarrow \forall a, b \in G$ *existiert ein Streckenzug* $S \subset G$*, der a mit b verbindet.*

Definition 5.6 *Eine nichtleere, offene, zusammenhängende Teilmenge* $G \subset \mathbb{C}$ *heißt* ***Gebiet****.*

Definition 5.7 *Eine Teilmenge D eines metrischen Raumes X heißt* ***Zusammenhangskomponente*** *von X falls gilt:*

1. *D ist zusammenhängend.*

2. $D \subset B \subset X$, B *zusammenhängend* $\Rightarrow D = B$ *(d.h. D ist maximal!)*

Definition 5.8 *Eine Teilmenge $K \subset X$ eines metrischer Raumes X heißt* ***kompakt****, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K eine endliche Teilüberdeckung $(U_j)_{j \in J}$, $J \subset I$ endlich, existiert.*

Satz 5.2 (Bolzano-Weierstraß) *$K \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_n$ in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.*

Satz 5.3 (Heine-Borel) *$K \subset \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^n$) ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Da $\mathbb{C}$ ein metrischer Raum mit einer Metrik ($d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$) ist, können wir die Begriffe Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen $f : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ ganz einfach wie im metrischen Raum definieren:
Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{C}$ beliebig, $f : D \to \mathbb{C}$ komplexwertige Funktion und $z_0 \in D$.

Definition 5.9

1. *f heißt* ***stetig in*** *$z_0 \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt.*

2. *f heißt* ***gleichmäßig stetig auf*** *D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ für alle $z_1, z_2 \in D$ und $|z_1 - z_2| < \delta$ gilt.*

Satz 5.4 *Ist $D \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Definition 5.10 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beliebig, $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen auf D und $f : D \to \mathbb{C}$.*

1. *(f_n) heißt* ***punktweise konvergent*** *mit Grenzfunktion f, falls für jeden Punkt $z_0 \in D$ gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.*

2. *(f_n) heißt* ***gleichmäßig konvergent*** *mit Grenzfunktion f, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und für alle $z \in D$.*

3. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen $(f_n)_n : U \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge: (f_n)* ***konvergiert lokal gleichmäßig*** *(oder kompakt) gegen $f : U \to \mathbb{C}$, falls (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ gleichmäßig konvergiert.*

Satz 5.5 *Die Grenzfunktion f einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ ist stetig.*

Definition 5.11 *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, $f_k : D \to \mathbb{C}$ konvergiert* ***gleichmäßig*** *(****lokal gleichmäßig****) wenn die Folge der Partialsummen (s_n), $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig (lokal gleichmäßig) konvergiert.*

Satz 5.6 (Majorantenkriterium von Weierstraß) *Sei* $(f_k), f_k : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktionenfolge,* (M_k) *eine Folge positiver Zahlen mit der Eigenschaft* $|f_k(z)| \leq M_k, \forall z \in D, \forall k \in \mathbb{N}$*. Konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$*, so konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *absolut und gleichmäßig.*

Definition 5.12 (normale Konvergenz) *Eine Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *von Funktionen* $f_k : U \to \mathbb{C}$ *(*U *offen in* $\mathbb{C}$*) heißt* ***normal konvergent****, wenn die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge* $K \subset U$ *eine konvergente Majorante besitzt.*

Satz 5.7 (Kriterium von Weierstraß) *Normale Konvergenz* $\Rightarrow$ *kompakte (lokal gleichmäßige) Konvergenz.*

Bemerkung *Die Umkehrung "*$\Leftarrow$*" ist falsch.*

5.1.2 Holomorphe Funktionen

Definition 5.13 (komplexe Differenzierbarkeit) $f : U \to \mathbb{C}, U \subset \mathbb{C}$ *offen, heißt in* $z_0 \in U$ *(komplex)* ***differenzierbar****, wenn der Grenzwert*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. (Schreibweise oft: $\frac{df}{dz}(z_0)$ *statt* $f'(z_0)$*). Ist* $f : U \to \mathbb{C}$ *in jedem Punkt* $z_0 \in U$ *(*U *offen in* $\mathbb{C}$*) komplex differenzierbar, so heißt* f ***holomorphe Funktion****.*

Bemerkung *Offenbar ist die Multiplikationsstruktur in* $\mathbb{C}$ *"verantwortlich" für die "Stärke" des Begriffes "holomorph". Im* $\mathbb{R}^2$ *(*$z = (x, y), z$ *aufgefasst als Punkt im* $\mathbb{R}^2$*) können wir den Differenzenquotient wie in Definition 5.13 gar nicht hinschreiben!*

Satz 5.8 (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit) *Sei* $U \subset \mathbb{C}, z_0 \in U$*. Dann gilt* $f : U \to \mathbb{C}$ *ist in* z_0 *komplex differenzierbar, genau dann wenn* $\exists \varphi : U \to \mathbb{C}$ *stetig in* z_0 *mit* $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi(z)\ \forall z \in U$*.*

Satz 5.9 (Kettenregel) *Seien* $f : U \to \mathbb{C}, g : V \to \mathbb{C}, U, V$ *offen in* $\mathbb{C}$ *und* $g(V) \subset U$*. Seien weiter* f, g *holomorph:*

$$f \circ g : V \to \mathbb{C}, z \mapsto f(g(z))$$

ist holomorph und es gilt:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

*Ist f komplex differenzierbar in $z \in U$, so existieren auch die partiellen Ableitungen von $u = \Re f$ und $v = \Im f$ im Punkt z und es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

Folgerung 1 *Ist $f = u + iv, U \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind Realteil u und Imaginärteil v harmonisch auf U, das heißt sie erfüllen die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0, \Delta v = 0$ auf U.*

Folgerung 2 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend (also Gebiet), $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$f' = 0 \Leftrightarrow f = const$$

Satz 5.10 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}, z_0 \in U$ äquivalent sind die folgenden Aussagen:*

1. *f ist in z_0 komplex differenzierbar*
2. *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

Die komplexe Exponentialfunktion

Erinnerung *Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ hat folgende Eigenschaften:*

1. exp *ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = y, y(0) = 1$.*
2. *exp genügt der Funktionalgleichung: $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*
3. exp *besitzt die auf $\mathbb{R}$ konvergente Taylorentwicklung*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$$

(vgl. mit Definition 3.89, Analysis 1)

Definition 5.14 *Die* ***komplexe Exponentialfunktion*** *ist definiert als* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y), z = x + iy$. *Dann gelten folgende Eigenschaften:*

- $z \mapsto e^z$ *ist holomorph auf* $\mathbb{C}$.
- e^z *stimmt auf* $\mathbb{R}$ *mit der reellen Exponentialfunktion überein.*
- $|e^z| = e^{\Re z} > 0 \Rightarrow e^z$ *besitzt in* $\mathbb{C}$ *keine Nullstellen.*

Außerdem sind die 3 ursprünglichen Eigenschaften erhalten:

1. $\frac{d}{dz}e^z = e^z, e^0 = 1$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
3. $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ *konvergiert auf ganz* $\mathbb{C}$ *absolut, gleichmäßig für alle kompakt Teilmengen* $U \subset \mathbb{C}$ *(also normal konvergent)*

Bemerkungen

1. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist periodisch. Es gilt:* $e^{z+2\pi ki} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$.
2. *Mit Hilfe der Exponentialfunktion können wir Sinus und Kosinus definieren:*

   $$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

   Damit sind $\sin z, \cos z$ *holomorph auf* $\mathbb{C}$ *und sie stimmen auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\sin x$ *und* $\cos x$ *überein.*
3. *Beachte:* $\cos z, \sin z$ *sind auf* $\mathbb{C}$ *nicht beschränkt!*
   Es gilt für $y \in \mathbb{R}$*:*

   $$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y, \sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \sinh y$$

   Weiter

   $$e^{iz} = \cos z + i \sin z, e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi, \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

   Dies ist die ***Formel von Euler****.*

5.1.3 Komplexe Integration

Definition 5.15

1. *Unter einem **parametrisierten Weg** in $\mathbb{C}$ versteht man eine stetige Abbilung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (häufig bezeichnet mit $z = z(t)$), $a \leq t \leq b$. γ heißt **stetig differenzierbar parametrisierter Weg**, falls $\Re\gamma(t)$ und $\Im\gamma(t)$ stetig differenzierbar sind.*

2. *Zwei stetig differenzierbar parametrisierte Wege $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ heißen **äquivalent**, falls es eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ gibt mit $\varphi' > 0$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

3. *Ein stetig differenzierbarer Weg ist eine **Äquivalenzklasse stetig differenzierbarer Wege**.*

4. *Zu einem stetig differenzierbaren Weg W, parametrisiert durch $\gamma(t), a \leq t \leq b$ heißt $\gamma(a)$ **Anfangspunkt** und $\gamma(b)$ **Endpunkt**.*
   *$|w| := \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ heißt **Träger von W**. W heißt **geschlossen** falls Anfangspunkt gleich dem Endpunkt ist.*

5. *Ein **stückweise stetig differenzierbarer Weg** W ist ein n-Tupel stetig differenzierbarer Wege $W_k(k-1,...,n)$ mit Endpunkt w_k =Anfangspunkt $W_{k+1}(k = 1,...,n-1)$.*

Definition 5.16 *Sei W stetig differenzierbarer Weg, parametrisiert durch $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, $f : |W| \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir definieren das **komplexe Kurvenintegral von f längs des Weges W** durch*

$$I := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_W f(z)dz$$

a, b als Anfangs-bzw. Endpunkt des Weges, $\dot{\gamma}(t) = \frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt}$.

Satz 5.11 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion f konvergiert, und W ein stückweise stetiger Weg in U. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_W f_n dz = \int_W f dz$$

Erinnerung *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:*

1. *Jede stetige reelle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F, das heißt es gilt $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $F' = f$.*

2. *Ist F Stammfunktion der stetigen Funktion f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(vgl. mit Kapitel 3.6.2, Analysis 1)

Definition 5.17 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$. Die Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt* ***Stammfunktion*** *zu f, falls F in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar ist (also F holomorph auf U) und*

$$F'(z) = f(z) \ \forall z \in U$$

gilt.

Satz 5.12 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und W ein stückweise differenzierbarer Weg in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Besitzt f auf U eine Stammfunktion $F : U \to \mathbb{C}$, so gilt:*

$$\int_W f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Insbesondere folgt damit:

$$\int_W f(z)dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg W in U.

Bemerkung *Lokal, das heißt auf jeder Kreisscheibe besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion! Eng verwandt mit dieser Aussage ist der Cauchy-Integralsatz, den wir uns im folgenden überlegen wollen.*

Satz 5.13 (Satz von Gauß) *Sei $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen, $W = (u, v)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U und G ein glatt (bzw. stückweise glatt) berandetes Gebiet mit $\overline{G} \subset U$. Dann gilt:*

$$\int_G \mathtt{div} w dxdy = \int_{\partial G} \langle w, u \rangle ds$$

Mit n, der äußeren Einheitsnormalen und dem Vektorfeld G.

Definition 5.18 *Ein Gebiet G heißt* ***positiv berandet****, falls G stets links von $\Gamma = \partial G$ liegt. Exakt formuliert: Für jede Randkomponente $\Gamma_j, (j = 1, ...n)$ gilt: Ist $\gamma_i(t)$ eine Parametrisierung des geschlossenen Weges Γ_j, so existiert zu jedem $t_0 \in [0, 1]$ ein $\delta_0 > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $n_j(t_0) := i\dot{\gamma}_j(t_0)$ der Normalenvektor im Punkt t_0, dann gilt: Für alle $0 < \lambda < \delta_0 : \gamma_j(t_0) + \lambda n_j(t_0) \in G, \gamma_j(t_0) - \lambda n_j(t_0) \neq G$.*

Satz 5.14 (Cauchy'scher Integralsatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und G mit $\overline{G} \subset U$ ein positiv berandetes Gebiet mit (orientiertem) stückweise glatten Rand Γ. Dann gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Satz 5.15 (Cauchy'sche Integralformel) *Unter Vorraussetzung des Cauchy'schen Integralsatzes gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi \forall z \in G$$

Korollar 5.1 *Unter der obigen Vorraussetzung gilt für die n-te Ableitung von f die Formel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi, \forall z \in G$$

Aus dem Cauchy-Integralsatz und der Integralformel ergeben sich direkt einige Konsequenzen für holomorphe Funktionen.

Satz 5.16 (Cauchy'sche Abschätzung) *Ist f auf U holomorph und beschränkt, das heißt $|f(z)| \le M,\ \forall z \in U$, so gilt für die n-te Ableitung $f^{(n)}$:*

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{dist(z\partial U)^n}M,\ \ dist(z, \partial U) = \inf_{\xi \in \partial U}|\xi - z|$$

Satz 5.17 (Liouville) *Jede auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant!*

Satz 5.18 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom n-ten Grades ($n \ge 1$) mit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, ($a_n \ne 0$) mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Korollar 5.2 *Jedes Polynom n-ter Ordnung ($n \ge 1$) mit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, ($a_i \in \mathbb{C}, a_n \ne 0$) besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten), das heißt es läßt sich wie folgt faktorisieren:*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdot \ldots \cdot (z - z_n),\ \ z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$$

5.1.4 Analytische Funktionen

Satz 5.19 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen) *Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k(z - z_0)^k$ gilt entweder:*

1. *Sie konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig auf allen Teilmengen.*

2. *Es gibt eine Kreisscheibe $B(z_0, R)$ mit $0 < R < \infty$ so dass gilt: Die Potenzreihe konvergiert auf $B(z_0, R)$ absolut und lokal gleichmäßig und sie diviergiert auf dem Komplement der abgeschlossenen Kreisscheibe $C\overline{B(z_0, R)}$.*

3. *Die Potenzreihe konvergiert nur in $z = z_0$.*

Definition 5.19 *R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe im Fall $1 : R = \infty$, im Fall $3 : R = 0$.*

Satz 5.20 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Es sei $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \inf \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq R \leq \lim_{k\to\infty} \sup \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$. Insbesondere gilt*

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

sofern der Limes existiert.

Satz 5.21 *Besitzt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ einen positiven Konvergenzradius R, so definiert sie auf dem offenen Konvergenzradius $B(z_0, R)$ eine holomorphe Funktion f; Zudem gilt:*

1. *Die n-te Ableitung $f^{(n)}$ wird dargestellt durch die Potenzreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n}$$

Ihr Radius ist ebenfalls R.

2. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ besitzt ebenfalls Radius R und ist auf $B(z_0, R)$ eine Stammfunktion von f.*

Satz 5.22 (Weierstraß) *Sei (f_k) eine Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig (also kompakt) gegen eine Grenzfunktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist auch f holomorph.*

Die Logarithmus-Funktion

Erinnerung *Für positive Zahlen a ist $\log a = \ln a$ wohldefiniert. Nehmen wir nun eine Komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, so ist $b = \ln a$ nicht mehr eindeutig, denn mit $a = |a|e^{i\varphi}$ und der Definition*

$$\log a = \log|a| + i\varphi + k2\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

gilt:

$$e^{\log a} = e^{\log|a|+i\varphi+k2\pi i} = |a|e^{i\varphi}\underbrace{e^{2\pi i}}_{1} = a$$

Definition 5.20 *Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet. Die Funktion $g : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ heißt **Zweig des Logarithmus** (bzw. Logarithmusfunktion), wenn gilt:*

1. *g ist stetig*
2. *Für alle $z \in G$ gilt: $e^{g(z)} = z$*

Satz 5.23 *Sei $G \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein Gebiet, $g : G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus. Dann ist g holomorph und es gilt*

$$g'(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in G$$

Mit g ist auch $\tilde{g} := g + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$ ein Zweig des Logarithmus. Zwei beliebige Zweige des Logarithmus unterscheiden sich nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

Lemma 5.1 (Umkehrsatz in $\mathbb{C}$) *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $g : V \to \mathbb{C}$ stetig mit $g(V) \subset U$. Ferner sei $f(g(w)) = w \; \forall w \in V$ und $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in U$. Dann ist auch g holomorph und für alle $w \in V$ gilt:*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

Taylorentwicklung

Definition 5.21 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **analytisch**, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit positiven Konvergenzradius existiert, so dass in einer Umgebung von z_0 die Potenzreihe mit der Funktion f übereinstimmt.*

Satz 5.24 (Taylor-Entwicklung) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ beliebig und $\varrho = \mathtt{dist}(z_0, \partial U)$ der Abstand von z_0 zum Rand von U. Dann konvergiert die Potenzreihe gegen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

(Taylorreihe) in jedem Punkt $z \in B(z_0, \varrho)$ und stellt die Funktion f dar, das heißt es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad \forall z \in B(z_0, \varrho)$$

Satz 5.25 *Ist $f : G \to \mathbb{C}, G \subset \mathbb{C}$ Gebiet holomorph und besitzt f eine Nullstelle im Punkt $z_0 \in G$ so gilt folgende Alternative: Entweder ist $f \equiv 0$ oder es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ für $k = 0, ..., n-1$ und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.*

Definition 5.22 *Die Zahl n mit der Eigenschaft aus den obigen Satz heißt* ***Ordnung der Nullstelle*** z_0 *von* f $(\not\equiv 0)$. *Die Nullstelle heißt* ***einfach****, wenn* $n = 1$ *ist.*

Korollar 5.3 (Zum Satz von Taylor) *Eine Funktion* $f : U \to \mathbb{C}, U$ *offen in* $\mathbb{C}$*, ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist.*

Satz 5.26 (Charakterisierung von Nullstellen) *Hat* $f : G \to \mathbb{C}$ *holomorph* $(f \not\equiv 0)$ *in* z_0 *eine Nullstelle der Ordnung n, so gibt es eine holomorphe Funktion* $f_n : G \to \mathbb{C}$ *mit* $f_n(z_0) \neq 0$ *und* $f(z) = (z - z_0)^n f_n(z_0) \forall z \in G$.

Korollar 5.4 (Isoliertheit der Nullstellen) *Sei f holomorph in einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$ *mit Nullstelle* $z_0 \in G$*. Dann existiert eine Umgebung* $V \subset G$ *um* z_0*, welche außer* z_0 *keine Nullstelle von f enthält.*

Anwendung: Identitätssatz *Seien* f, g *auf einem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$ *holomorph. Gilt* $f(z_k) = g(z_k)$ *für alle Punkte einer Folge* $\{z_k\}$ *mit Häufungspunkt in G, so muss* $f \equiv g$ *sein.*

5.1.5 Isolierte Singularitäten - Laurentreihen

Der Riemann'sche Fortsetzungssatz

Definition 5.23 *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $A \subset U$.

1. *Ein Punkt* $a \in A$ *heißt isolierter Punkt von A, wenn es eine Umgebung* $V \subset U$ *von a gibt mit* $V \cap A = \{a\}$.
2. *Eine Menge A heißt diskret in U, wenn alle Punkte von A isoliert sind.*
3. *Eine holomorphe Funktion* $f : U \backslash A \to \mathbb{C}, A \subset U$ *abgeschlossen, heißt holomorph in A fortsetzbar, falls es eine holomorphe Funktion* $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ *gibt mit* $\hat{f}|_{U\backslash A} = f$.

Satz 5.27 (Fortsetzungssatz von Riemann) *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $A \subset U$ *diskret und abgeschlossen. Sei* $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *f ist holomorph nach A fortsetzbar.*
2. *f ist stetig nach A fortsetzbar.*
3. *Zu jedem* $a \in A$ *existiert eine Umgebung* $V \subset U$ *von a, so dass f auf* $V \backslash \{a\}$ *beschränkt ist.*
4. $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = 0 \forall a \in A$.

Definition 5.24 *Ist* $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}, a \in U$ *in keiner Umgebung von a beschränkt (also nicht holomorph nach a fortsetzbar), so heißt a* ***isolierte Singularität****.*

Klassifikation isolierter Singularitäten

Definition 5.25 *Sei $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph ($U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$)*

1. *a heißt **hebbare Stelle von f**, wenn f nach a holomorph fortsetzbar ist*
2. *a heißt **Polstelle von f**, wenn gilt $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$. Das heißt zu belieben $\eta > 0$ existiert eine Umgebung $V \subset U$ von a derart, dass*
$$|f(z)| > \eta, \forall z \in V\backslash\{a\}$$
3. *a heißt **wesentliche Singularität von f**, wenn a weder hebbar noch Polstelle ist.*

Satz 5.28 (Charakterisierung von Polstellen) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$, $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *a ist Polstelle von f*
2. *Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}$, sowie eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit $g(a) \neq 0$, derart dass*
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}, \forall z \in U\backslash\{a\}$$

Definition 5.26 *Die eindeutig bestimmte Zahl n aus Satz 5.28 heißt **Ordnung des Pols**. Bei $n = 1$ ist die Polstelle einfach.*

Laurent-Reihe

Definition 5.27 *Eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

*heißt **Laurent-Reihe**. Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k$ heißt **Hauptteil** und die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ **Nebenteil** der Laurent-Reihe. Die Laurent-Reihe heißt **konvergent**, falls Haupt- und Nebenteil konvergent sind.*

Satz 5.29 (Entwicklungssatz von Laurent) *Jede im Kreisring $A_{r,R}(z_0), 0 \leq r \leq R \leq \infty$ holomorphe Funktion f ist in $A_{r,R}(z_0)$ in eine Laurent-Reihe entwickelbar.*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, z \in A_{r,R}(z_0)$$

Die Koeffizienten $a_k, k \in \mathbb{Z}$ sind eindeutig bestimmt durch die Formel

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

gegeben. Dabei bezeichnet C_ϱ eine Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius ϱ ($r < \varrho < R$). Zum Beweis benötigen wir den

Satz 5.30 (Cauchy-Integralformel für Kreisringe) *Ist f holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und ist der abgeschlossene Kreisring $\overline{A}_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}, 0 < r < R < \infty$ ganz in G enthalten, dann gilt für alle $z \in A_{r,R}(z_0)$ (offener Kreisring $r < |z - z_0| < R$) die Formel:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, c_\varrho = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| = \varrho\}$$

Satz 5.31 (Charakterisierung isolierter Singularitäten) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\varrho = \mathtt{dist}(a, \partial U)$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k$ die Laurentreihe von f im Kreisring $B(a, \varrho) \backslash \{a\} = A_{0,\varrho}(a)$. Dann gilt:*

1. *a ist hebbare Stelle* $\Leftrightarrow a_{-k} = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$
2. *a ist Polstelle n-ter Ordnung* $\Leftrightarrow a_{-k} = 0 \;\; \forall k > n, a_n \neq 0$
3. *a ist wesentliche Singularität* $\Leftrightarrow a_{-k} \neq 0$ *für unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung *Ein wichtiger Unterschied zwischen Potenzreihen und Laurentreihen ist der, das letztere im Allgemeinen keine Stammfunktion besitzen. Der Grund ist, dass Laurentreihen den Summand $a_{-1}(z - a)^{-1}$ besitzen. Dies werden wir im nächsten Kapitel näher untersuchen.*

5.1.6 Der Residuensatz

Definition 5.28 *Der Koeffizient $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho} f(z) dz$ (mit C_ϱ der Kreislinie um a mit $\overline{B(a, \varrho)} \subset U$) der Laurentreihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - a)^k$ zur Funktion $f : U \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ (mit $U \subset \mathbb{C}$ offen, f holomorph) heißt **Residuum** von f in a, in Zeichen:*

$$a_{-1} = \mathtt{Res}_a f$$

Satz 5.32 (Existenz einer Stammfunktion) *Sei f holomorph im Ring $A_{r,R}(z_0)$. Dann gilt: f besitzt genau dann eine Stammfunktion F in $A_{r,R}(z_0)$, wenn der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung von f in z_0 verschwindet.*

Die Umlaufzahl (Indexfunktion)

Definition 5.29 *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener (stückweise stetig differenzierbarer) Weg in $\mathbb{C}$, $|\gamma| = \gamma([0,1]), z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma|$. Die Zahl*

$$\mathtt{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

*heißt die **Umlaufzahl** (bzw. der Index) von γ bezüglich z. Die Menge $\mathtt{Int}\gamma := \{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| : \mathtt{ind}_\gamma(z) \neq 0\}$ heißt **Inneres** von γ, die Menge $\mathtt{Ext}\gamma := \{z \in \mathbb{C}\backslash|\gamma| : \mathtt{ind}_\gamma(z) = 0\}$ heißt **Äußeres** von γ. Offensichtlich gilt $\mathbb{C} = \mathtt{Int}\gamma \cup |\gamma| \cup \mathtt{Ext}\gamma$.*

Satz 5.33 *Sei γ ein beliebiger geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

1. *Für jedes $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ ist $\mathtt{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.*

2. *Die Funktion $\mathtt{ind}_\gamma(z)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$ und verschwindet auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}\backslash|\gamma|$.*

3. *$\mathtt{ind}_{-\gamma}(z) = -\mathtt{ind}_\gamma(z)$ für alle $z \in \mathtt{C}\backslash|\gamma|$.*

Satz 5.34 *Sei G ein Gebiet $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und Nullstellenfrei. Sei γ ein Weg in G mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Dann gilt:*

$$f(z_1) = f(z_0)e^{\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi}$$

Korollar 5.5 *Ist f holomorph und nullstellenfrei auf dem Gebiet G und γ ein geschlossener Weg in G, so gilt*

$$\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Denn nach dem Satz 5.34 ist $e^{\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi} = 1$.

Definition 5.30

1. *Seien $\gamma_1, ..., \gamma_m$ Wege in $U \subset \mathbb{C}$ offen. Wir versehen jeden Weg mit einer ganzen Zahl (die besagt, wie oft der Weg durchlaufen wird; $-\gamma$ bezeichnet dabei den entgegengesetzt durchlaufenen Weg). Das System*

$$\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + ... + n_m\gamma_m, n_k \in \mathbb{Z}$$

   *heißt **Kette**.*

2. *Eine Kette $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k\gamma_k$ heißt **Zyklus** (bzw. geschlossene Kette), wenn jeder Punkt, unter Berücksichtung der Vielfachheit n_k ebenso oft als Anfangspunkt eines γ_k wie als Endpunkt eines γ_k auftritt.*

Definition 5.31 *Ist* $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k\gamma_k$ *eine Kette in* U, $f : U \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion, so setzen wir das* ***Integral längs einer Kette***

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^{m} n_k \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

Insbesondere können wir die Umlaufzahl auf Zyklen ausdehnen. Ist $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k\gamma_k$ *ein Zyklus, so setzen wir* $\mathtt{ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi, z \in \mathbb{C}\backslash|\Gamma|$.

Definition 5.32 *Ein Zyklus in einer offenen Menge* $U \subset \mathbb{C}$ *heißt* ***nullhomolog in U****, wenn für jeden Punkt* $z \in CU$ *(Komplement von U) gilt:*

$$\mathtt{ind}_\Gamma(z) = 0$$

Zwei Zyklen Γ_1, Γ_2 *heißen homolog, falls* $\Gamma_1 - \Gamma_2$ *nullhomolog in U ist.*

Satz 5.35 (Cauchy'scher Integralsatz - Allgemeine Form) *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *holomorph,* Γ *ein in U nullhomologer Zyklus. Dann gilt* $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Satz 5.36 (Cauchy Integralformel - Allgemeine Form) *Unter den Vorraussetzungen des Allgemeinen Cauchy-Integralsatzes gilt für jeden Punkt* $z \in U\backslash|\Gamma|$ *und alle* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*:*

$$\mathtt{ind}_\Gamma(z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}d\xi$$

Der Residuensatz

Satz 5.37 (Residuensatz) *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $z_0, ..., z_n$ *endlich viele Punkte in U und* Γ *ein nullhomologer Zyklus in U, dessen Träger* $|\Gamma|$ *keinen Punkt* z_j, $j = 1, ..., n$ *enthält. Dann gilt für jede in* $U\backslash\{z_1, ..., z_n\}$ *holomorphe Funktion* f*:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \mathtt{ind}_\Gamma(z_j)\mathtt{Res}_{z_j} f$$

Satz 5.38 *Sei* $U \supset \overline{\mathbb{H}}$ *offen,* $z_j \in \mathbb{H}, j = 1, ..., m$ *und* $f : U\backslash\{z_1, ..., z_m\} \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion derart, dass* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *existiert und* $\lim_{z\to\infty, z\in U} zf(z) = 0$ *gilt. Dann folgt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathtt{Res}_{z_j} f$$

Satz 5.39 *Sei g holomorph auf* $\mathbb{C}$*, eventuell mit Ausnahme von endlich vielen Punkten, von denen keiner auf der reellen Achse liegt. Ferner sei* $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$*. Dann gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iax}dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathtt{Res}_w[g(z)e^{iaz}], & a > 0 \\ -2\pi i \sum_{w\in C\overline{\mathbb{H}}} \mathtt{Res}_w[g(z)e^{iaz}], & a < 0 \end{cases}$$

Mit $C\overline{\mathbb{H}}$*, der unteren Halbebene.*

5.2 Gewöhnliche Differentialrechnung

Bemerkung *Aus Analysis II kennen wir bereits den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, der unter der Vorraussetzung, dass die rechte Seite der Differentialgleichung $u' = f(x,u)$ stetig und bezüglich der zeiten Varaible einer Lipschitz-Bedingung genügt, die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung zum Anfangswertproblem $u(x_0) = u_0$ garantiert.*

Definition 5.33

1. *Ein **Anfangswertproblem** besteht aus einer Differentialgleichung $u^{(m)} = f(x, u, ..., u^{(m-1)})$ und einem Satz von Anfangsdaten $x_0 \in \mathbb{R}$, $\eta_0, ..., \eta_{m-1} \in \mathbb{R}^N$. $u : I \to \mathbb{R}^N$ heißt **Lösung des Anfangswertproblemes**, wenn u die Differentialgleichung auf I löst, $x_0 \in I$ und die Anfangsbedingungen $u(x_0) = \eta_0$, $u'(x_0) = \eta_1, ...,$ $u^{(m-1)}(x_0) = \eta_{m-1}$ gelten.*

2. *Ein **Randwertproblem** besteht aus einer Differentialgleichung, einem Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ und gegebenen Funktionen g, h auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. u heißt **Lösung des Randwertproblemes**, wenn u die Differentialgleichung auf $[\alpha, \beta]$ löst und die Randbedingungen $g(u(\alpha), u'(\alpha), ..., u^{(n)}(\alpha)) = 0, h(u(\beta), ..., u^{(n)}(\beta)) = 0$ erfüllt sind. In sinnvollen Randwertproblemen ist die Ordnung der Differentialgleichungen gerade und $n = \frac{m}{2} - 1$.*

5.2.1 Elementare Lösungsmethoden

Satz 5.40 (lineare Differentialgleichungen erster Ordnung) *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}, I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetig. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y' = a(x)y + b(x)$$

kann durch Integration bestimmt werden. Genauer gilt, dass die allgemeine Lösung durch $y(x) = e^{A(x)}(B(x) + C)$ gegeben ist, wobei $A(x)$ eine Stammfunktion zu a auf I ist, B eine Stammfunktion zu $e^{-A(x)}b(x)$ auf I ist und $C \in \mathbb{K}$. Jedes Anfangswertproblem $y' = ay + b, y(x_0) = y_0$ mit $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}$ ist eindeutig lösbar und zwar durch:

$$y(x) = e^{A(x)}(e^{-A(x_0)}y_0 + B(x) - B(x_0)) = e^{A(x)}[e^{-A(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s)ds]$$

Definition 5.34 *Eine quasilineare Differentialgleichung 1. Ordnung (das heißt eine Differentialgleichung, die in der höchsten auftretenden Ableitung linear ist)*

$$g(x, y) + h(x, y)y' = 0$$

*heißt auf $D \subset \mathbb{R}^2$ **exakt**, wenn es eine differenzierbare Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial \phi}{\partial x} = g$ und $\frac{\partial \phi}{\partial y} = h$ gibt (ϕ heißt Stammfunktion).*

Satz 5.41 (Exakte Differentialgleichungen) *Die Lösungen einer exakten Differentialgleichung $g(x,y) + h(x,y)y' = 0$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ sind genau die differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ mit dem Graphen von $y \subset D$, die einer impliziten Gleichung $\phi(x, y(x)) = C$ genügen, dabei ist ϕ Stammfunktion zu $gdx + hdy = 0$ auf D und $C \in \mathbb{R}$.*

Definition 5.35 *Eine Funktion $\phi \not\equiv 0$ auf einem Gebiet des erweiterten Phasenraumes einer Differentialgleichung $y^{(m)} = f(x, y, ..., y^{(m-1)})$ auf $\mathbb{R}^N$ heißt **erstes Integral der Differentialgleichung**, wenn $\phi(x, y(x), ..., y^{(m-1)}(x))$ bzw. $\phi(y(x), ..., y^{(m-1)}(x))$ konstant für jede Lösung $y(x)$ ist. Man nennt dies ϕ dann auch **Erhaltungsgröße**.*

5.2.2 Lineare Differentialgleichungen und Systeme

Definition 5.36 (Lineare Differentialgleichungen) *Eine **lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung** auf einem normierten Raum E über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, ist eine Differentialgleichung der Form*

$$A_m(x)y^{(m)}(x) + A_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + ... + A_0(x)y(x) = b(x)$$

*auf einem Interval I mit stetigen Koeffizienten $A_j \in C^0(F, L(E,E))$ (im Fall $E = \mathbb{K}^N$ sind das $N \times N$-matrixwertigen Funktionen) und einer stetigen Inhomogenität $b \in C^0(I, E)$. Ist $b \equiv 0$, so heißt die Differentialgleichung **homogen**. Im Fall $E = \mathbb{K}^N$ spricht man von einem **linearen Differentialgleichungssystem**.*
*Das Polynom $p(x, \xi) = A_m(x)\xi^m + ... + A_1(x)\xi + A_0(x)$ mit Koeffizienten in $C^0(I, L(E,E))$ heißt **charakteristisches Polynom der Differentialgleichung** oder auch Symbol des Differentialoperators*

$$p(x, \frac{d}{dx}) = A_m(x)\frac{d^m}{dx^m} + ... + A_1(x)\frac{d}{dx} + A_0(x)$$

Lemma 5.2 (Überlagerungsprinzip)

1. *Im homogenen Fall $b = 0$ sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen, das heißt der Lösungsraum ist ein Linearer Raum.*

2. *Im inhomogenen Fall $b \neq 0$ ist die Allgemeine Lösung die Summe einer beliebigen speziellen Lösung y_{sp} der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung y_k der homogenen Gleichung.*

3. *Sind $y_1, ...y_k$ Lösungen von $p(x, \frac{d}{dx})y_i = b_i$ und $c_i \in \mathbb{K}$, so löst $y = \sum_{i=1}^{l} c_i y_i$ die Differentialgleichung $p(x, \frac{d}{dx})y = \sum_{i=1}^{l} c_i b_i$.*

4. *Ist $E = E_{\mathbb{R}} + i\mathbb{R}$ Komplexifizierung eines reellen Raumes (etwa $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^N$ und $E = \mathbb{C}^N$) und sind alle Koeffizienten $A_j(x)$ und die rechte Seite $b(x)$ reell, so sind die reellen Lösungen von der DGL in Definition 5.36 genau die Realteile der komplexen Lösungen.*

Definition 5.37 *Eine Basis (über $\mathbb{K}$) des Lösungsraumes der explizit homogenen Differentialgleichung*

$$y^{(m)} + A_{m-1}(x)y^{(m-1)} + ... + A_0(x)y = 0$$

auf I heißt ***Fundamentalsystem der Differentialgleichung*** *auf I.*

Satz 5.42 (Skalare lineare DGL mit konstanten Koeffizienten)

(1) *Der Raum der komplexwertigen Lösungen der Differentialgleichung $p(\frac{d}{dx})y = y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + ... + a_0 y = 0$ auf I mit $a_0, ..., a_{m-1} \in \mathbb{C}$ hat die Funktionen $x^j e^{\lambda x}, 0 \leq j \leq m_\lambda$, wobei λ Nullstelle von $p(\xi) = \xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + ... + a_0$ mit Vielfachheit m_λ ist, als Basis. Die Allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser m-Funktionen.*

($1_\mathbb{R}$) *Sind die Koeffizienten $a_0, ..., a_{m-1}$ reelle Zahlen, so hat der Raum der reellen Lösungen von $p(\frac{d}{dx})y = 0$ auf I die Basis $x^j e^{\lambda x}$ für λ reelle Nullstelle von p und $x^j e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ bzw. $x^j e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ für λ komplexe Nullstelle von p mit $0 \leq j \leq m_\lambda$, der Vielfachheit von λ.*

(2) *Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $p(\frac{d}{dx})y = b$ mit $b \in C^0(I, \mathbb{C})$ ist $y_{sp}(x) = I_{\lambda_1} \dots I_{\lambda_m} b(x)$ mit $[I_\lambda v](x) = e^{\lambda x}\int_{x_0}^x e^{-\lambda s}v(s)ds, x_0 \in I, \lambda_1, ..., \lambda_m$ die Nullstellen von p (mit Vielfachheit aufgeführt).*

(3) *Jedes Anfangswertproblem $p(\frac{d}{dx})y = b$ auf $I, y^{(j)}(x_0) = \eta_j$ für $j = 0, ..., m-1$ mit $b \in C^0(I, \mathbb{K}), a_j \in \mathbb{K}, x_0 \in I, \eta_j \in \mathbb{K}$ besitzt eine eindeutige $\mathbb{K}$-wertige Lösung der Form $y_{sp} + \sum_{j=1}^m c_j y_j$ wobei $y_1, ..., y_m$ die Basisfunktionen aus (1) bzw. ($1_\mathbb{R}$) sind, y_{sp} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist und die $c_j \in \mathbb{K}$ die eindeutigen Lösungen des linearen Gleichungssystems $\sum_{j=1}^m c_j y_j^{(l)}(x_0) = \eta_l - y_{sp}^{(l)}(x_0), 0 \leq l \leq m-1$ sind.*

Satz 5.43 (Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten) *Die eindeutige Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}^N \vee \mathbb{C}^N$ des Anfangswertproblems $y' = Ay, y(x_0) = \eta$ mit $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ist die analytische Funktion $y(x) = e^{(x-x_0)A}\eta$. Darüber hinaus ist jedes Anfangswertproblem $y' = Ay + b$ mit $y(x_0) = \eta, b \in C^0(I, \mathbb{K}^N)$ eindeutig lösbar und zwar durch*

$$y(x) = e^{xA}(e^{-x_0 A}\eta + \int_{x_0}^x e^{-sA}b(s)ds)$$

Bemerkungen

1. *e^{xA} ist wohldefiniert über die Exponentialreihe $e^{xA} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}(xA)^k$.*

2. *Für diagonalisierbare Matrizen* $A = TBT^{-1}$ *mit* $T \in \mathtt{GL}(\mathbb{C}^N)$ *und* $B = \mathtt{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_N)$ *ist*
$$e^{xA} = T\mathtt{diag}(e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_N x})T^{-1}$$
In diesem Fall bilden die Funktionen $y_k(x) = e^{\lambda_k x}v_k$ *(*v_k *Eigenvektoren zum Eigenwert* λ_k*) ein Fundamentalsystem zu* $y' = Ay$.

3. *Im Allgemeinen Fall einer nicht diagonalisierbaren Matrix A muss man eine Zerlegung der Form* $A = T+S$ *mit S Diagonalmatrix und T nilpotent (mit* $TS = ST$*) vornehmen. So das gilt:* $\exp(A) = \exp(T+S) = \exp(T)\exp(S)$. *Die Lineare Algebra zeigt uns, dass dies über* $\mathbb{C}$ *stets möglich und eindeutig ist (Jordansche Normalform). Hier benötigt man den Satz über die Hauptraumzerlegung (LA).*

Satz 5.44 (Fundamentalsysteme für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}, A \in \mathbb{K}^{N\times N}, \sigma(A) = \mathtt{spec}(A) = \{$ *Eigenwerte von* $A\}$*, dann gilt:*

1. *Ist v Eigenvektor von A zum Eigenwert* λ*, so ist* $y(x) = e^{\lambda x}v$ *Lösung von* $y' = Ay$.

2. *Gibt es eine Basis* $v_1, ..., v_N$ *von Eigenvektoren zu Eigenwerten* $\lambda_1, ..., \lambda_N$ *(oder mit Vielfachheit aufgeführt) zu* $\mathbb{K}^N$*, so bilden die Funktionen*
$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}v_1, ..., y_N(x) = e^{\lambda_N x}v_N$$
ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung $y' = Ay$.

3. *Sind* $v_1^{(\lambda)}, ..., v_{n(\lambda)}^{(\lambda)}$ *Basen der Haupträume* $H_\lambda = \ker(\lambda - A)^{m(\lambda)} = \ker(\lambda - A)^{m(\lambda)+1}, \lambda \in \sigma(A), m(\lambda) \in \mathbb{N}$ *minimal so bilden die Funktionen*
$$y_1^{(\lambda)}(x) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{m(\lambda)-1}\frac{x^k}{k!}(A - \lambda\mathbb{E})^k v_j^{(\lambda)}, 1 \leq j \leq n(\lambda), \lambda \in \sigma(A)$$
ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung $y' = Ay$.

Korollar 5.6 (Reelles Fundamentalsystem) *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *so erhält man ein reelles Fundamentalsystem indem man für* $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$ *die* $v_j^{(\lambda)}$ *reell und für jedes Paar* $\lambda, \overline{\lambda} \in \sigma(A), \lambda = \alpha + i\beta$ *nicht reeller Eigenwerte die* $v_j^{(\lambda)}, v_j^{(\overline{\lambda})}$ *konjugiert komplex wählt (*$v_j^{(\overline{\lambda})} - \overline{v_j^{(\lambda)}}$*) sowie* $v_j^{(\lambda)}, v_j^{(\overline{\lambda})}$ *durch* $\Re v_j^{(\lambda)}, \Im v_j^{(\lambda)}$ *ersetzt. Die Komponenten der reellen Lösungen von* $y' = Ay$ *sind dann Linearkombinationen der folgenden Basisvektoren:*
$$x^k e^{\lambda x}, \lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}, x^k e^{\alpha x}\begin{pmatrix} \sin\beta x \\ \cos\beta x \end{pmatrix}, \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)\backslash\mathbb{R}, 0 \leq k \leq m(\lambda) - 1$$

5.2.3 Hauptsätze über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Daten

Satz 5.45 (von Picard-Lindelöf) *Sei* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \supset [\tau - \delta, \tau + \delta] \times B_r(\eta_0) \to \mathbb{K}^N, \mathbb{K} = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ *stetig,* $\eta_0 \in \mathbb{K}^N, \tau \in \mathbb{R}$ *und* $0 < r, \delta \leq \infty$. *Weiter besitze* f *die folgenden Eigenschaften:*

(B) $||f(x, \eta)|| \leq M < \infty$ *Beschränktheit.*

(L) $||f(x, \eta) - f(x, \tilde{\eta})|| \leq L||\eta - \tilde{\eta}||$ *(partielle Lipschitz-Bedingung)*

Für alle $x \in [\tau - \delta, \tau + \delta], \eta, \tilde{\eta} \in B_r(\eta_0)$. *Dann existiert auf jeden Intervall* $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ *mit* $0 \leq \varepsilon \leq \min\{\delta, \frac{r}{M}\}$ *genau eine Lösung des Anfangswertproblems* $y' = f(x, y)$ *auf* $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon], y(\tau) = \eta_0$, *und diese verläuft ganz in der Kugel* $B_r(\eta_0)$.

Zu diesem Satz gibt es auch eine lokale Version die keine Bedingung der Form (B) verlangt, dafür aber auch keine Aussage über die Größe des Existenzintervalls macht.

Satz 5.46 (Lokaler Existenz und Eindeutigkeitssatz) *Sei* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm} \supset D \to \mathbb{K}^N$ *stetig und bezüglich der* $\mathbb{K}^{Nm}$ *Variablen lokal partiell Lipschitz stetig auf der offenen Menge* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm}$. *Dann gilt:*

1. *(Lokaler Existenzsatz) Zu jedem Satz von Anfangsdaten* $(\tau, \eta_0, ..., \eta_{n-1}) \in D$ *gibt es eine Größe* $\varepsilon > 0$, *so dass auf jedem Intervall* $[\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ *mit* $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *das Anfangswertproblem* $y^{(m)} = f(x, y, ..., y^{(m-1)}), y^{(l)}(\tau) = \eta_l$ *für* $0 \leq l \leq m - 1$ *eine Lösung besitzt.*

2. *(Eindeutigkeit) Zu jedem Intervall I mit* $\tau \in I$ *und* $(\tau, \eta_0, ..., \eta_{m-1}) \in D$ *gibt es höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems* $y^{(m)} = f(x, y, ..., y^{(m-1)}), y^{(l)}(\tau) = \eta_l, 0 \leq l \leq m - 1$ *auf I. (Eventuell gibt es auch keine, falls I zu groß ist!)*

Bemerkung *Dass f bezüglich der* $\mathbb{K}^{Nm}$*-Variablen lokal partiell Lipschitz-stetig ist, bedeutet nichts anderes, als dass es zu jedem Punkt aus D eine Umgebung U und ein* $L < \infty$ *gibt, so dass*

$$||f(x, y_0, ..., y_{m-1}) - f(x, \tilde{y}_0, ..., \tilde{y}_{m-1})|| \leq L \sum_{l=0}^{m-1} ||y_l - \tilde{y}_l||$$

für alle $(x, y_0, .., y_{m-1}), (x, \tilde{y}_0, ..., \tilde{y}_{m-1}) \in U$ *gilt. Der Schrankensatz garantiert die Gültigkeit dieser Bedingung, wenn* $f(x, y_0, ..., y_{m-1})$ *bezüglich der Variablen* $y = (y_0, ...y_{m-1}) \in \mathbb{K}^{Nm}$ *differenzierbar ist mit lokal beschränkter Norm* $||D_y f(x, y)||$, *etwa im Fall* $D_y f(x, y)$ *stetig auf D.*

Satz 5.47 (Existenzsatz von Peano) *Sei* $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{Nm}$ *offen und* $f : D \to \mathbb{K}^N$ *stetig. Dann hat jedes Anfangswertproblem* $y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(m-1)}), y^{(l)}(\tau) = \eta_l$ *für* $0 \leq l \leq m - 1$ *mit Anfangsdaten* $(\tau, \eta_0, ..., \eta_{m-1}) \in D$ *lokal eine Lösung, das heißt auf einem kleineren (offenen) Intervall um* τ.

Satz 5.48 (Maximale Lösung) *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig und partiell Lipschitz-stetig bezüglich der $\mathbb{K}^N$-Variablen. Dann gilt:*

1. *Zu jedem Anfangsdatum $(\tau, \eta_0) \in D$ gibt es ein maximales Intervall $I_{\max} \subset \mathbb{R}$ mit $\tau \in I_{\max}$ derart, dass das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(\tau) = \eta_0$ auf $I_{\max}$ eine Lösung besitzt. Jede Lösung des Anfangswertproblems auf einem Intervall I ist die Einschränkung $y|_I$ der maximalen Lösung.*

2. *$I_{\max}$ ist ein offenes Intervall (x_-, x_+) mit $-\infty < x_- < \tau < x_+ < +\infty$. Bei $x \to x_-$ von oben und $x \to x_+$ von unten verläßt $(x, y(x))$ jede beschränkte Teilmenge $A \subset D$, die eine Parallelmenge $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N : \mathtt{dist}((x, \eta), A) \leq \varepsilon\}$ in D besitzt, auf der f beschränkt ist, endgültig. Das bedeutet, dass $(x, y(x)) \notin A$ für alle $x \in (x_-, x_+)$ die nahe genug bei x_+ bzw. x_- liegen. Insbesondere verläßt $(x, y(x))$ jede kompakte Teilmenge von D endgültig.*

Geometrische Interpretation *Ist $D = J \times G$ mit G offen in $\mathbb{K}^N$, so bedeutet dies im Fall $x_+ < \sup y$, das die Lösung bei $x \to x_+$ gegen den Rand von 0 oder Norm nach gegen ∞ strebt, oder beides, und zwar in dem Sinn, dass*

$$\min\{\mathtt{dist}(y(x), \delta D), \frac{1}{1 + \|y(x)\|}\} \to 0, x \to x_+$$

Satz 5.49 (Existenz von Lösungen auf einem vorgegebenen Intervall) *Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{K}^N$ offen und $f : J \times G \to \mathbb{K}^N$ stetig und partiell Lipschitz-stetig. Dann existiert die maximale Lösung y eines Anfangswertproblems $y' = f(x, y), y(\tau) = \eta_0$ auf dem vorgegebenen Intervall J, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

1. *$y(x)$ ist periodisch: $y(x) = y(x + C), C > 0 \; \forall x \in J, x + C \in J$; im autonamen Fall genügt sogar*
$$y(x_1 + C) = y(x_1), x_1 \in J$$

2. *Die Lösungsbahn $\{y(x) : x_- < x < x_+\}$ hat kompakten Abschluss in G.*

3. *$G = \mathbb{K}^N$ und f erfüllt eine lineare Wachstumsbedingung $\|f(x, y)\| \leq a(x)\|y(x)\| + b(x) \; \forall (x, y) \in J \times \mathbb{K}^N$ mit stetigen Funktionen $a, b : J \to [0, \infty)$.*

4. *Die Differentialgleichung ist selbst schon linear, das heißt $y' = A(x)y + B(x)$ auf J mit $A \in C^0(J, \mathbb{K}^{N \times N}), B \in C^0(J, \mathbb{K}^N)$.*

Satz 5.50 (Abschätzung für Differentialgleichungen) *Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \supset D \to \mathbb{K}^N$ stetig auf der offenen Menge D und $y : I \to \mathbb{K}^N$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ auf I, $y(\tau) = \eta_0$.*

1. *Erfüllt die rechte Seite von f eine lineare Wachstumsbedingung*

$$\|f(x,y)\| \leq a(\|y\| + b), a, b \in [0,\infty) \subset D$$

so gilt:

$$\|y(x)\| \leq (\|\eta_0\| + b)e^{a|x-\tau|} - b, x \in I$$

2. *Erfüllt f eine partielle Lipschitz-Bedingung*

$$\|f(x,y) - f(x,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|, L > 0$$

auf D und ist $\tilde{y} \in C^1(I,D)$ beliebige Näherungslösung so ist die Differenz von y zu $\tilde{y}$ abgeschätzt durch

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq (\frac{\gamma}{L} + C)e^{L|x-\tau|} - \frac{\gamma}{C}$$

auf I wobei $C := \|\tilde{y}(\tau) - \eta_0\|$ die Abweichung der Anfangswerte und $\gamma := \sup_I \|\tilde{y}'(x) - f(x,y(x))\|$ der Defekt von $\tilde{y}$, also die Abweichung von der Differentialgleichung bei $\tilde{y}$, ist.

Lemma 5.3 (von Gronwall) *Angenommen $y \in C^1(I,\mathbb{K}^N)$ genügt der Differentialgleichung*

$$\|y'\| \leq a(\|y\| + b),$$

auf I mit $a, b \in [0,\infty)$. Dann gilt

$$\|y(x)\| \leq (\|y(\tau)\| + b)e^{a|x-\tau|} - b, \quad \forall x, \tau \in I.$$

Satz 5.51 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten) *Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig und lokal partiell-Lipschitz stetig bezüglich $\mathbb{K}^N$-Variablen, D offen, $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall. Dann hängt die Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ auf I, $y(\tau) = \eta_0$ (mit $\tau \in I$, $(\tau,\eta_0) \in D$) im folgenden Sinn stetig von τ, η_0 und f ab. Zu jeder Lösung $y : I \to \mathbb{K}^N$, Umgebung U von Graph(y) in D, Konstanten $C < \infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Lösung der gestörten Anfangswertproblems $\tilde{y}' = \tilde{f}(x,\tilde{y})$, $\tilde{y}(\tilde{\tau}) = \tilde{\eta}_0$ auf I existiert und Abstand $\leq \varepsilon$ zu y besitzt, das heißt es gelte*

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I,$$

sofern $\tilde{\tau} \in I$, $\tilde{\eta}_0 \in \mathbb{K}^N$ sind mit $|\tau - \tilde{\tau}| \leq \delta$, $\|\eta_0 - \tilde{\eta}_0\| \leq \delta$ und wenn $\tilde{f} : D \to \mathbb{K}^N$ stetig und partiell Lipschitz-stetig ist mit

(V1) $\|f - \tilde{f}\| \leq \delta$ *auf U.*

(V2) $\|f - \tilde{f}\| \leq \delta$ *auf Graph(y) und* $\|\tilde{f}(x,\eta) - \tilde{f}(x,\tilde{\eta})\| \leq C\|\eta - \tilde{\eta}\|$ *auf U.*